یہ ممکن ہے کہ تمام تفرقی سر معدوم ہوں، اِس صورت میں اس مسئلہ پر دوسرے طریقوں سے بحث کی جاسکتی ہے۔
مثالاً اگر توانائی بالقوہ

$$ک = لا^2 تو^{\frac{1}{2}}$$

(۱۰۳)

شکل (۱۰۲)

کی شکل کی ہو تو تشکیل لا = ۰ میں تمام تفرقی سر معدوم ہوتے ہیں۔ تفاعل ک کی ترسیم کھینچنے پر معلوم ہوگا کہ توازن قائم ہے۔

یہ ہوسکتا ہے کہ ک کے تمام تفرقی سر اِس وجہ سے معدوم ہوں کہ اُس پورے علاقہ میں جو زیرِ بحث تشکیل کے گرد ہے ک مستقل ہے۔ اگر ایسا ہے تو نظام کو ہٹایا جاسکتا ہے اور کوئی قوت نہیں ہوگی جو اس کو اِس نئی تشکیل سے حرکت دے۔ ہر تشکیل توازن کی تشکیل ہوگی۔ اس قسم کے توازن کو تعدیلی توازن کہتے ہیں۔

تعدیلی توازن کی ایک صورت مثال ۲ صفحہ ۲۵۸ میں واقع ہوچکی ہے، دروازہ جو قبضوں کے انتصابی خط کے گرد آزادانہ گھوم سکے۔ دوسری صورت ایک کرہ کی ہے جو افقی مستوی پر لڑھکتا ہو۔

نظامات جنکو آزادی کے مختلف درجے حاصل ہوں

۱۵۳۔ ابتک ہم نے صرف اُن نظامات پر بحث کی ہے جو تشکیلات کے صرف ایک سلسلہ میں سے حرکت کرنے پر مجبور تھے یعنے نظامات جن کو صرف آزادی کا ایک درجہ حاصل تھا۔ اُس نظام کی قائمیت یا غیر قائمیت متعین کرنے کا مسئلہ جس کو آزادی کے ایک سے زیادہ درجے حاصل ہوں زیادہ پیچیدہ ہے۔

اگر توازن کے محل میں توانائی بالقوہ مطلقاً اقل ہے اور اِس لیے ہر ممکن حرکت سے توانائی بالقوہ میں اضافہ ہوجاتا ہے تو یہ توازن قائم ہوگا۔ اِسکو اُسی استدلال سے ثابت کیا جاسکتا ہے جو اُس صورت میں استعمال کیا گیا تھا

جس میں آزادی کا صرف ایک درجہ حاصل تھا۔
اگر توانائی بالقوہ مطلقاً اقل نہیں ہے یعنی اگر ایسے ہٹاؤ ممکن ہیں جس میں توانائی بالقوہ گھٹتی ہے جبکہ نظام توازن کے محل سے حرکت کرتا ہے تو یہ تشکیل غیر قائم توازن کی تشکیل ہوگی۔ اِس کو آیندہ ثابت کیا جائیگا کیونکہ اِس باب کے طریقوں سے اسے ثابت نہیں کیا جا سکتا اور اس لئے ہم اس کو آیندہ کے لئے چھوڑتے ہیں (بارہواں باب)۔

عام مثالیں

(۱۸۵)

۱۔ ثابت کرو کہ ایک انجن کی اسپی طاقت جو س میل فی گھنٹہ کی چال سے ر پاؤنڈ کی مزاحمت پر غالب آتا ہے حسب ذیل ہے:

ر س ÷ ۳۷۵

۲۔ ایک ٹرین معہ حراکہ (انجن) ۵۰۰ ٹن وزنی ہے۔ اِس کو ۳۰ میل فی گھنٹہ کی ایکساں شرح سے ہموار پر متحرک رکھا گیا ہے، ہوا کی مزاحمت، رگڑ وغیرہ ۱۰ پونڈ فی ٹن ہیں۔ انجن کی اسپی طاقت معلوم کرو۔
اِس اسپی طاقت میں کتنا اضافہ ہونا چاہئے کہ اِس کی شرح تو وہی رہے لیکن اس کے ساتھ ہی پٹریوں کے درمیانی حصہ کا پانی اس طور پر اوپر اٹھایا جائے کہ طے شدہ فاصلہ کے ہر فٹ پر اٹھائے ہوئے پانی کی مقدار ۲۰ پونڈ ہو اور جس ارتفاع تک پانی اٹھایا گیا ہے وہ ۱۰ فٹ ہو۔ وہ توانائی بالحرکت جو پٹریوں کے درمیانی حصہ کا پانی حاصل کرتا ہے اور وہ توانائی بالحرکت جو اٹھائے ہوئے پانی کی (بلحاظ ٹیانک کے) ہے نظر انداز کر دی گئی ہے۔

۳۔ ایک مخروطی پہاڑی کے رخ ایسی شکل کے ہیں کہ ایک معلومہ کمیت اِن پر بغیر پھسلے عین ٹھیر سکتی ہے۔ ایک شخص چاہتا ہے کہ اس کمیت کو پہاڑی کے دامن کے ایک نقطہ سے دوسرے نقطہ تک جو قبل الذکر نقطے کے متقاطر ہے حرکت دے۔ ثابت کرو کہ کمیت کو پہاڑی کے اوپر کھینچنے میں جو کام کرنا پڑتا ہے وہ اُس کام سے جو اس کو پہاڑی کے دامن کے گرد کھینچنے میں کرنا پڑتا ہے

نسبت ۲ : π میں کم ہے۔

۴ ۔ ثابت کرو کہ وہ کام جو ایک شخص ایک وزن کو پہاڑی کے اوپر ایک معلوم نقطہ ا سے چوٹی ب تک کھینچنے میں انجام دیتا ہے صرف ا اور ب کے مقامات پر منحصر ہوتا ہے اور پہاڑی کی شکل پر منحصر نہیں ہوتا بشرطیکہ وہ ہمیشہ ا اور ب میں سے گذرنے والے انتصابی مستوی میں وزن کو کھینچے۔

۵ ۔ ایک لچکدار رسی کے دو سروں کو شکل V کے لکڑی کے ایک ٹکڑے کی دو شاخوں سے باندھ کر ایک منجنیق بنائی گئی ہے، رسی کا طبعی طول ا ہے اور لچک کا مقیاس لہ ہے اور لکڑی کی شاخیں ایک دوسرے سے فاصلہ ل پر ہیں اور ل، ا سے بڑا ہے منجنیق کے وسطی نقطہ پر کمیت ک کا ایک پتھر رکھا گیا اور اسے پیچھے کی جانب کھینچا گیا یہاں تک کہ رسی کا طول تن کر اپنے طبعی طول کا دُگنا ہو گیا۔ اب اگر اس کو آزاد چھوڑ دیا جائے تو معلوم کرو کہ وہ کس رفتار سے منجنیق سے نکلے گا۔

۶ ۔ مثال ۵ میں اگر پتھر کو انتصاباً اوپر وار پھینکا جائے تو وہ ساکن ہونے سے پیشتر کتنی بلندی تک چڑھے گا۔

۷ ۔ کمیت ک کا ایک ہار منکوں سے بنایا گیا ہے جو ایک تاگے میں جس کی لچک کا مقیاس لہ ہے پروئے گئے ہیں۔ اس کو ایک چکنے قائم مستدیر مخروط کی سطح پر جس کا زاویہ راس ۲ عہ اور محور انتصابی ہے اس طرح سہارا گیا ہے کہ ہار ایک افقی مستوی میں ہے اور تاگا تنا ہوا نہیں ہے۔ اگر ہار کو چھوڑ دیا جائے تو وہ ساکن ہونے سے پیشتر مخروط کے نیچے کتنا پھسلیگا۔

۸ ۔ ایک اُڑ پہیہ کا نصف قطر ۲ فٹ ۶ انچ ہے اور اَروں وغیرہ کا وزن کور (Rim) کے مقابلہ میں نظر انداز کیا جا سکتا ہے۔ پہیہ ایک ثابت محور کے گرد فی منٹ ۲۵۰ گردشوں کی شرح سے گھوم رہا ہے۔ محور کا قطر ۳ انچ ہے اور پہیہ اور محور کے درمیان رگڑ کی قدر $\frac{1}{۳۰}$ ہے۔ اگر اس کو آزاد چھوڑ دیا جائے تو رکنے سے قبل وہ کتنی گردشیں کرے گا۔

۹ ۔ ایک مکڑی چھت سے ایک تاگے کے ذریعہ جس کی لچک کا مقیاس

اُس کے وزن کے مساوی ہے لٹک رہی ہے ۔ ثابت کرو کہ وہ چھت تک اتنا کام کرکے چڑھ سکتی ہے جو اُس کام کا صرف تین چوتھائی ہے جو مطلوب ہوتا اگر تاگا لچکدار نہ ہوتا ۔

۱۰ ۔ ایک مہین تاگے کے دو سِروں سے دو مساوی وزن ف باندھ کر اِس کو دو چکنی کھونٹیوں پر جو ایک ہی افقی خط میں ایک دوسرے سے ۲ ا فاصلہ پر ہیں لٹکایا گیا ہے ۔ پھر کھونٹیوں کے درمیان تاگے کے حصہ کے وسطی نقطہ پر کمیت ق باندھ کر اِس کو جاذبہ کے تحت نیچے اُترنے چھوڑ دیا گیا ۔ ثابت کرو کہ اِس کی رفتار گہرائی لا تک گرنے کے بعد حسب ذیل ہوگی :

$$\left\{\frac{2\text{ج}\left(\text{لا}^2+\text{ا}^2\right)\left(\text{ق}\,\text{لا}+2\text{ف}\,\text{ا}-2\text{ف}\sqrt{\text{لا}^2+\text{ا}^2}\right)}{\text{ق}\left(\text{لا}^2+\text{ا}^2\right)+2\text{ف}\,\text{لا}^2}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

۱۱ ۔ اگر یہ تسلیم کیا جائے کہ زمین کی بیرونی جانب کسی جسم پر زمین کی کشش اُس فاصلہ کے بالعکس متناسب ہے جو زمین کے مرکز اور جسم کے درمیان ہے تو معلوم کرو کہ زمین کی سطح سے ایک گولی کو انتصاباً اوپر وار کس رفتار سے فائر کرنا چاہیے کہ وہ کبھی زمین پر واپس نہ آسکے ۔

۱۲ ۔ ایک بھاپ ہتھوڑی جس کا وزن ۳۰ ٹن ہے کچھ تو اپنے وزن سے اور کچھ اُس بھاپ کے دباؤ سے نیچے دبائی جاتی ہے جو ایک انتصابی اسطوانہ میں ایک فشارہ پر جو ہتھوڑی کے ساتھ حرکت کرتا ہے عمل کرتا ہے ۔ فشارہ کا رقبہ چار مربع فٹ ہے اور بھاپ کا دباؤ ۲۲۵ پونڈ فی انچ ہے ۔ اگر ہتھوڑی کو اپنے بلاک سے ۲ فٹ اوپر اٹھایا جائے اور چھوڑ دیا جائے تو وہ رفتار معلوم کرو جس کے ساتھ وہ بلاک سے ٹکرائے گی ۔

۱۳ ۔ طول ل کے ایک یکساں ڈنڈے کے سِروں سے طول ا کی ایک ڈوری باندھی گئی ہے جو ایک چکنی کھونٹی پر سے گذرتی ہے ۔ ثابت کرو کہ ڈنڈا صرف افقی یا انتصابی محل میں لٹک سکتا ہے ۔ اِن محلوں کی قائمیت یا غیر قائمیت کا امتحان کرو ۔

۱۴ ۔ دو مساوی یکساں ڈنڈوں کو اُستوار طریقہ سے انگریزی حرف L کی شکل میں جوڑا گیا ہے اور پھر اِن کو نصف قطر ا کے ایک چکنے مستدیر اسطوانے پر سوار کیا گیا ہے

ڈنڈوں کا وہ چھوٹے سے چھوٹا طول معلوم کرو جو توازن کی قائمیت کے مطابق ہو اگر ڈنڈے ایک انتصابی مستوی میں جو اسطوانے کے طول پر عمود ہے رہنے کے لیے مقید ہوں ۔

۱۵ — ایک پتھر کا مکعب جس کے کنارے کا طول ا ہے قطر ب کے ایک کھردرے دائری کندے پر متشاکلاً ٹکا ہوا ہے اور اس کا قاعدہ کندے پر افقاً ہے۔ ثابت کرو کہ توازن قائم یا غیر قائم ہے بموجب اس کے کہ ب > یا < ا ۔

۱۶ — ایک جھولنے والا پتھر ایک ثابت پتھر پر ٹکا ہوا ہے، تماس کھردرا ہے اور نقطہ تماس پر کا مشترک عماد انتصابی ہے ۔ اگر نقطہ تماس پر ان پتھروں کی سطحوں کے نصف قطر انحناء غہ اور غہَ ہوں اور اگر حرکت پذیر پتھر کے مرکز ثقل کا ارتفاع ف ہو تو ثابت کرو کہ جھولنے والے پتھر کا توازن قائم یا غیر قائم ہوگا بموجب اس کے کہ

$$\frac{1}{ف} > \text{یا} < \frac{1}{غہ} + \frac{1}{غہَ}$$

(۱۸۷) ۱۷ — طول ل اور وزن و کی ایک سیڑھی ایک کھردرے فرش پر انتصابی محل میں اس طرح کھڑی ہے کہ ایک لچکدار ڈوری اس کے سب سے اونچے نقطہ سے اور چھت کے ایک ایسے نقطہ سے بندھی ہے جس کا ارتفاع فرش کے اوپر ب ہے، اور ڈوری کا تناؤ ت ہے ۔ ثابت کرو کہ توازن قائم یا غیر قائم ہے بموجب اس کے کہ

$$ت > \text{یا} < \frac{و(ب-ل)}{۲ب}$$

۱۸ — اگر مثال ۱۷ میں تناؤ و (ب-ل) | ۲ب کے مساوی ہو تو معلوم کرو کہ توازن قائم ہے یا غیر قائم ۔

۱۹ — اگر مثال ۱۴ میں ڈنڈے فاصل طول کے ہوں جو قائمیت کو غیر قائمیت سے منفصل کرتا ہے تو ثابت کرو کہ توازن تعدیلی ہے اور اس لیے ڈنڈے بعض خاص حدود کے اندر کسی محل میں اس مستوی میں ساکن رہ سکتے ہیں جو اسطوانہ کے محور پر عمود ہے ۔

۲۰ — ثابت کرو کہ مثال ماسبق کے ڈنڈے ان ہٹاؤں کے لحاظ سے قائم

توازن میں ہیں جن میں ڈنڈوں کا مُستوی ایک انتصابی محور کے گرد گھومتا ہے، اور وہ جفت معلوم کرو جو ڈنڈوں کو ایسے محل میں رکھنے کے لیے مطلوب ہے جس میں مُستوی، اسطوانے کے محور کے ساتھ کوئی معلومہ زاویہ طہ بنائے۔

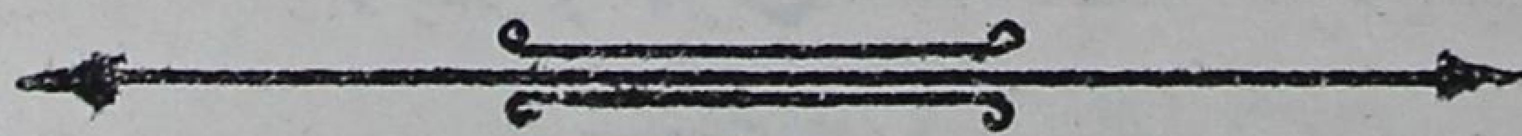
۲۱۔ مثال ماسبق میں ڈنڈوں کا وہ چھوٹے سے چھوٹا طول معلوم کرو کہ تمام ممکن ہٹاؤں کے لیے توازن قائم ہو سکے۔

۲۲۔ سخت اُبلے ہوئے انڈے کے چپٹے اور نوکدار سِروں پر نصف قطر انحنا، علی الترتیب ا اور ب ہیں اور انڈے کو ایک کھردرے افقی سطح پر اس کے چپٹے سرے کے بل عین متوازن کھڑا کیا جا سکتا ہے۔ ثابت کرو کہ اس کو اس کے نوکدار سرے پر ایک نیم کروی برتن کے اندر جس کا نصف قطر

$$\frac{ب(ج - ا)}{ج - ب - ا}$$

سے کم ہو متوازن کھڑا کیا جا سکتا ہے جہاں ج انڈے کے طول ترین محور کا طول ہے۔ اگر برتن کا نصف قطر فاصل طول کے عین مساوی ہو تو معلوم کرو کہ توازن قائم ہوگا یا غیر قائم۔

۲۳۔ تین متساوی الفصل چکنی کھونٹیاں ا، ب، ج ایک ہی افقی خط میں ہیں اور ایک وزندار یکساں ڈوری کے سِرے ا اور ج سے بندھے ہیں اور ڈوری کو ب پر حلقہ بناتے ہوئے گذارا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ جب زنجیرے اب، ب ج نامساوی ہوں تو یہ ہو سکتا ہے کہ توازن کا کوئی محل ہو یا نہ ہو اور اگر ایسا کوئی محل ہے تو یہ توازن قائم ہوگا۔
نیز ثابت کرو کہ توازن کا وہ محل جس میں ڈوری کا وسطی نقطہ ب پر ہے غیر قائم یا قائم ہے بموجب اس کے کہ توازن کا غیر متشاکل محل موجود یا غیر موجود ہو۔



(۱۸۸)

آٹھواں باب

مستقل قوتوں کے تحت ذرہ کی حرکت

۱۵۴ - کسی واحد ذرہ کی حرکت کی سادہ ترین مثال اُس وقت واقع ہوتی ہے جبکہ ذرہ صرف مستقل قوتوں کے زیر عمل ہو اور ایک خط مستقیم میں حرکت کرے ۔

اگر ذرہ کی حرکت کی سمت میں قوت کا جزو ترکیبی ف ہے تو حرکت کے دوسرے قانون کی رُو سے اسراع ع مساوات

ف = ک ع

سے حاصل ہوگا جہاں ک، ذرہ کی کمیت ہے ۔ چونکہ بموجب فرض قوتیں مستقل ہیں اسراع ع بھی مستقل ہے ۔

فرض کرو کہ ذرہ رفتار ۶ سے حرکت کرنا شروع کرتا ہے اور مستقل اسراع ع کے ساتھ حرکت کرتا ہے ۔ وقت ت میں رفتار میں اضافہ ع ت ہے اور اس لیے وقت ت کے بعد کل رفتار ۶ + ع ت ہے ۔ اِس رفتار کو و سے تعبیر کرو تو

و = ۶ + ع ت . . . . (۴۴)

تعریف کی بموجب و = فرس / فرت جہاں س، وہ فاصلہ ہے جو حرکت کی ابتدا سے طے ہوا ہے ۔ اِس لیے

فرس / فرت = ۶ + ع ت

اِس مساوات سے کسی لمحہ پر س کے اضافہ کی شرح معلوم ہوتی ہے۔ اس کا تکمل کرنے سے

س = ۶ ت + ½ ع ت۲ (۴۵)

تکمل کے مستقل کی ضرورت نہیں ہے کیونکہ وقت ت = ۰ پر فاصلہ طے شدہ (حسب تعریف) س صفر ہونا چاہیئے۔

مساوات (۴۴) سے ۶ = و - ع ت اور اس لیے مساوات (۴۵) لکھی جا سکتی ہے

س = و ت - ½ ع ت۲ (۴۶)

اِس مساوات سے وقت ت میں طے شدہ فاصلہ معلوم ہوتا ہے (۱۸۹) جبکہ رفتار و معلوم ہو جہاں و' فاصلہ طے شدہ کے ختم پر ذرہ کی رفتار ہے۔

مساواتوں (۴۵) اور (۴۶) کو جمع کرنے سے حاصل ہوتا ہے

س = ½ (۶ + و) ت (۴۷)

جس سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ فاصلہ طے شدہ، ۶ ت اور و ت کا اوسط حسابی ہے، ۶ ت وہ فاصلہ ہے جو طے ہوتا اگر ذرہ اپنی ابتدائی رفتار ۶ پورے وقت ت میں قائم رکھتا اور و ت وہ فاصلہ ہے جو طے ہوتا اگر ذرہ اپنی آخری رفتار و پورے وقت ت میں قائم رکھتا۔

مساوات (۴۴) کو شکل

ع ت = (و - ۶)

میں رکھو اور ت کو اس مساوات اور مساوات (۴۷) سے ساقط کرو تو حاصل ہوگا

۲ ع س = و۲ - ۶۲ (۴۸)

یہ وہ مساوات ہے جو طے شدہ فاصلہ کو ابتدائی اور آخری رفتاروں کے ساتھ مربوط کرتی ہے۔

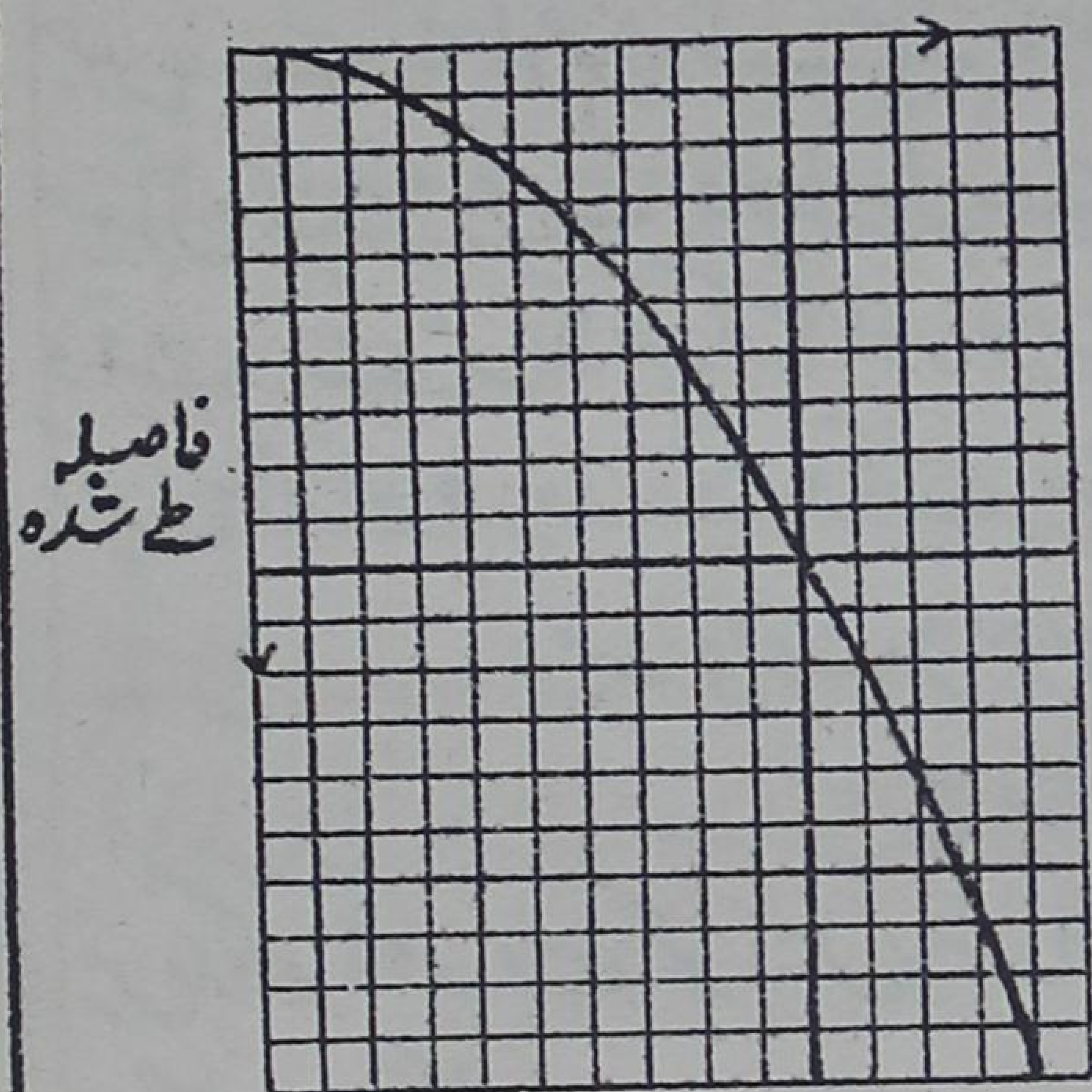
یہ آخری مساوات توانائی کی مساوات سے بھی حاصل کی جا سکتی ہے۔ چونکہ ذرہ پر جو کام ہوا ہے وہ اس کی توانائی بالحرکت کی تبدیلی کے مساوی ہے اس لیے

$$ف س = \frac{1}{2} ک و^2 - \frac{1}{2} ک ع^2$$

اور چونکہ ف = ک ع اس لیے مساوات (۴۸) فوراً حاصل ہو جاتی ہے۔

جسم جو جاذبہ کے تحت گرے

۱۵۵ ـــــ ان مساواتوں کا سادہ ترین اطلاق اُس صورت پر ہوتا ہے جبکہ کوئی جسم جاذبہ کے زیر اثر آزادانہ گر رہا ہو، اس صورت میں اسراع ج ہے اگر جسم سکون سے حرکت کرنا شروع کرتا ہے تو ہم ع = ۰ رکھتے ہیں اور س کو انتصاباً نیچے وار پیمائش کرتے ہیں۔ مساوات (۴۵) سے معلوم ہوگا کہ وقت ت کے ختم پر جسم نے فاصلہ $\frac{1}{2}$ ج ت^2 طے کیا ہے اور اس کی رفتار ج ت ہے۔ فاصلہ ف تک گرنے پر اس کی رفتار حسب مساوات (۴۸)، $\sqrt{۲ ج ف}$ کے مساوی ہے۔ اس کو بالعموم یوں بیان کرتے ہیں کہ وہ "رفتار بوجہ ارتفاع ف" ہے



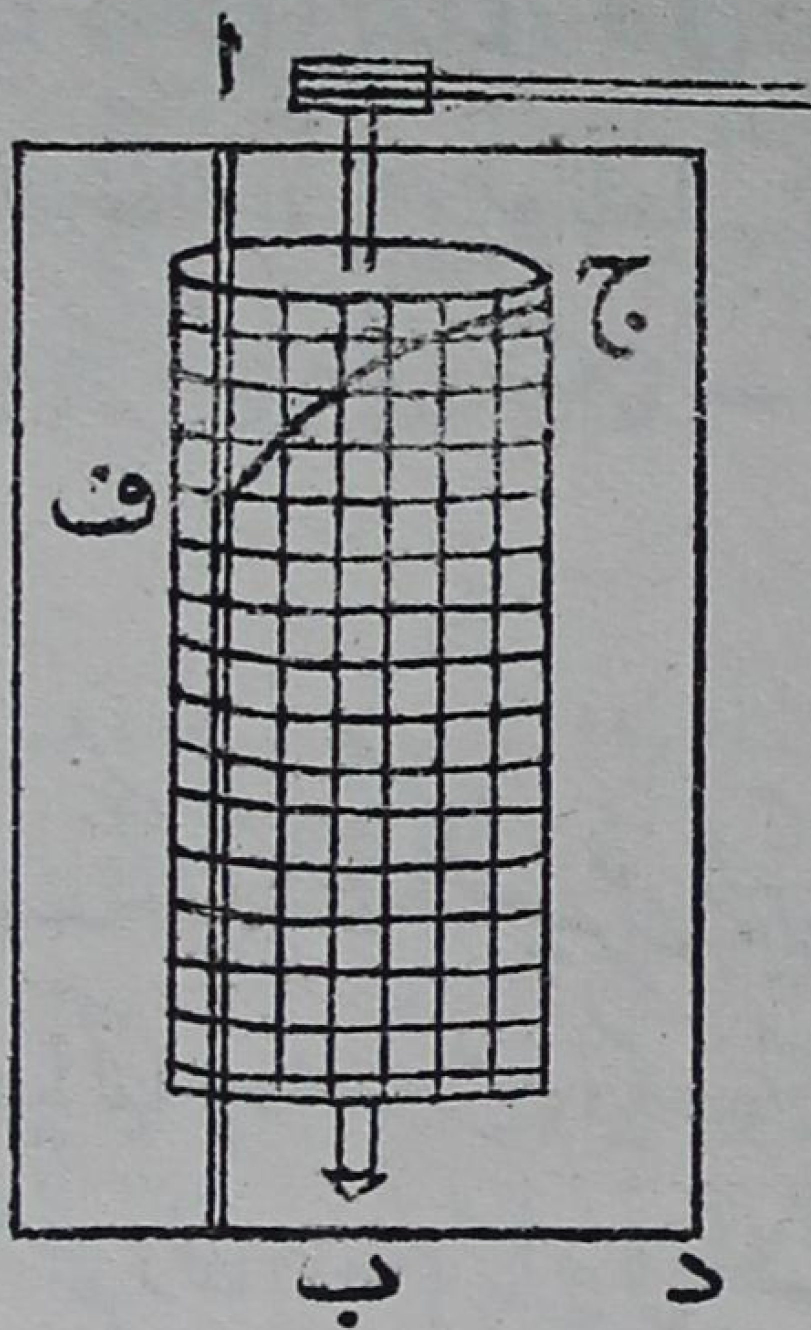
شکل (۱۰۳)

ہم دیکھتے ہیں کہ طے شدہ فاصلہ اُس وقت کے مربع کے متناسب ہے جس میں جسم گرتا رہا! شکل (۱۰۳) میں وقت کو افقاً پیمائش کیا گیا ہے اور فاصلہ طے شدہ کو انتصاباً۔ جلی منحنی سے فاصلہ طے شدہ کی ترسیمی تعبیر حاصل ہوتی ہے۔ افقی فاصلہ کو لا سے اور انتصابی فاصلہ کو ما سے تعبیر کیا جائے تو لا = ت اور ما = $\frac{1}{2}$ ج ت^2 اور

اور اس لیے

$$ما = \frac{1}{2} ج لا^2$$

۱۵۶ ۔ یہ ایک قطع مکافی کی مساوات ہے ۔ اس ترسیم کو تجربتاً اس طریقہ سے حاصل کیا جا سکتا ہے جو مارن (Morin) کا طریقہ کہلاتا ہے ۔ وزن ف ایک سوراخ میں جو ایک ڈنڈے اب میں بنا ہوا ہوتا ہے انتصاباً گرنے میں آزاد ہوتا ہے اور یہ انتظام کیا جاتا ہے کہ جب وہ گرتا ہے تو اس سے لگی ہوئی ایک پنسل ڈھول ج د پر جس میں کاغذ لگا ہوا ہوتا ہے نشان ڈالتی جاتی ہے ۔ ڈھول کو یکساں طور پر گھمایا جاتا ہے ۔ کاغذ کو ڈھول سے جدا کر لینے پر شکل (۱۰۳) کی ترسیم حاصل ہوتی ہے کیونکہ افقی فاصلہ وقت کے متناسب ہوتا ہے اور انتصابی فاصلہ وہ فاصلہ ہوتا ہے جس میں سے وزن گرتا ہے ۔ یہ واقعہ کہ اس طریقہ سے حاصل شدہ منحنی ٹھیک طور پر مکافی ہوتا ہے اس حقیقت کا تجربی ثبوت ہے کہ جاذبہ کے تحت حرکت یکساں اسراع کی حرکت ہوتی ہے ۔



شکل (۱۰۴)

۱۵۷ ۔ اگر جسم کو انتصاباً اوپر وار رفتار ع سے پھینکا جائے تو فاصلہ س کی پیمائش انتصاباً اوپر وار ہو سکتی ہے اور اس سمت میں اسراع − ج ہوگا ۔ چنانچہ حاصل ہوگا

$$س = ع ت - \frac{1}{2} ج ت^2 ،$$

$$و = ع - ج ت ،$$

$$۲ ج س = ع^2 - و^2$$

جہاں س وہ فاصلہ ہے جو وقت ت میں اوپر وار طے ہوا ہے اور و اوپر وار

رفتار ہے پہلی مساوات سے ہم دیکھتے ہیں کہ س = ۰ نہ صرف اس وقت جبکہ ت = ۰ بلکہ اس وقت بھی جبکہ ت = $\frac{۲ ع}{ج}$ ۔ اس لیے ذرہ اپنے ابتدائی مقام پر وقت $\frac{۲ ع}{ج}$ کے بعد واپس پہنچتا ہے ۔ جب س = ۰ تو تیسری مساوات سے $ع^۲ = و^۲$ حاصل ہوتا ہے اس لیے جب ذرہ اپنے ابتدائی مقام پر واپس آتا ہے تو اس کی رفتار وہی ہوتی ہے جو یہاں سے نکلتے وقت اس کی تھی ۔ صریحاً ایسا ہی ہونا چاہئے کیونکہ توانائی بالقوہ وہی ہوتی ہے اور اسلیے توانائی بالحرکت بھی وہی ۔

مثالیں

۱۔ اگر ایک اکسپرس ٹرین کو دو حصوں میں جدا کر کے نصف اول کو ۵ منٹ قبل چلا دیا گیا ہو اور ٹرین ایک میل تک مستقل اسراع کے ساتھ حرکت کرنے کے بعد اپنی اعظم رفتار ۴۸ میل فی گھنٹہ حاصل کرے تو ثابت کرو کہ یہ دو نصف حصے ایک دوسرے سے ۴ میل کے فاصلہ سے حرکت کریں گے لیکن نصف اول، نصف دوم کے نکلنے سے پیشتر ۳ میل جا چکا ہوگا ۔

۲ ۔ ایک ٹرین دوسری ٹرین سے جو متوازی پٹریوں پر دوڑ رہی ہے گذر جاتی ہے، اول الذکر کی رفتار ۴۵ میل فی گھنٹہ اور اسراع ایک فٹ فی ثانیہ ہے، دوسری کی رفتار ۳۰ میل فی گھنٹہ اور اسراع ۲ فٹ فی ثانیہ فی ثانیہ ہے ۔ یہ دوسری ٹرین پھر کب پہلی ٹرین کو ملا لے گی اور اس اثناء میں دونوں کتنا فاصلہ طے کر چکی ہوں گی ۔

۳ ۔ ایک جسم کو ایک غبارے سے جو زمین سے ۷۰ فٹ اونچا ہے گرایا گیا ہے ۔ اس کی رفتار زمین پر پہنچنے پر معلوم کرو اگر غبارہ ۳۰ فٹ فی ثانیہ کی رفتار سے (۱) چڑھ رہا ہو (ب) اُتر رہا ہو ۔

۴ ۔ ایک پتھر کو ایک کنویں میں چھوڑا گیا تو پانی سے ٹکرانے کی آواز ۹ ثانیہ بعد

کنویں کے سرے پر سُنائی دی۔ کنویں کی گہرائی معلوم کرو اگر آواز کی رفتار ۱۱۰۰ فٹ فی ثانیہ ہو۔

۵ ۔ ایک آلہ بار بردار ۵ فٹ فی ثانیہ کے اسراع سے نیچے اُترتا ہے یہاں تک کہ اِس کی رفتار ۳۰ فٹ فی ثانیہ ہو جاتی ہے اور اِس کے بعد اِس کی رفتار مستقل رہتی ہے۔ اُترنا شروع کرنے کے ۶ ثانیہ بعد ایک پتھر اُس نقطہ سے جہاں سے وہ چلا تھا اِس پر گرایا جاتا ہے۔ پتھر کسقدر جلد اُس سے جا لگے گا۔

۶ ۔ ایک بازیگر تین گولوں کو ایک ہاتھ سے اس طرح اُچھالتا ہے کہ کسی آن دو گولے ہوا میں رہتے ہیں اور ایک اُس کے ہاتھ میں۔ اگر ہر گولہ ۴ فٹ تک اونچا جائے تو ثابت کرو کہ وہ وقت جس میں ایک گولا اُس کے ہاتھ میں رہتا ہے $\frac{1}{2}$ ثانیہ ہے۔ (۱۹۲)

۷ ۔ یہ مشاہدہ کیا گیا کہ ایک جسم جہاز کے دروازہ کے راستہ سے اِس کے پیٹے کی تہ تک گرنے میں جو گ فٹ گہرا ہے ت ثانئے لیتا ہے۔ ثابت کرو کہ وہ فاصلہ

$$\frac{1}{2}ج\left(\frac{گ}{ج ت}+\frac{1}{2}ت\right)^2 \text{فٹ}$$

میں سے گِرتا ہے اور رفتار

$$\frac{گ}{ت}+\frac{1}{2}ج ت \text{ فٹ فی ثانیہ}$$

سے تہ پر ٹکراتا ہے۔

۸ ۔ ۱۲ فٹ لمبی زنجیر اپنے اوپر کے سِرے سے لٹک رہی ہے۔ اگر اِس سِرے کو چھوڑ دیا جائے تو وہ وقت معلوم کرو جو زنجیر ایک نقطہ سے جو ابتدائی محل کے بلند ترین نقطہ سے ۶۰ فٹ نیچے ہے گذرنے میں لے گی۔

۹ ۔ ایک جسم جس کی کمیت ۵ پونڈ ہے اور جو ۱۶۰ فٹ فی ثانیہ کی چال سے حرکت کر رہا ہے دفعتاً ایک مستقل مزاحمت کے مقابل ہوتا ہے جو $\frac{1}{4}$ پونڈ وزن کے مساوی ہے، یہ مزاحمت اِس وقت تک رہتی ہے کہ

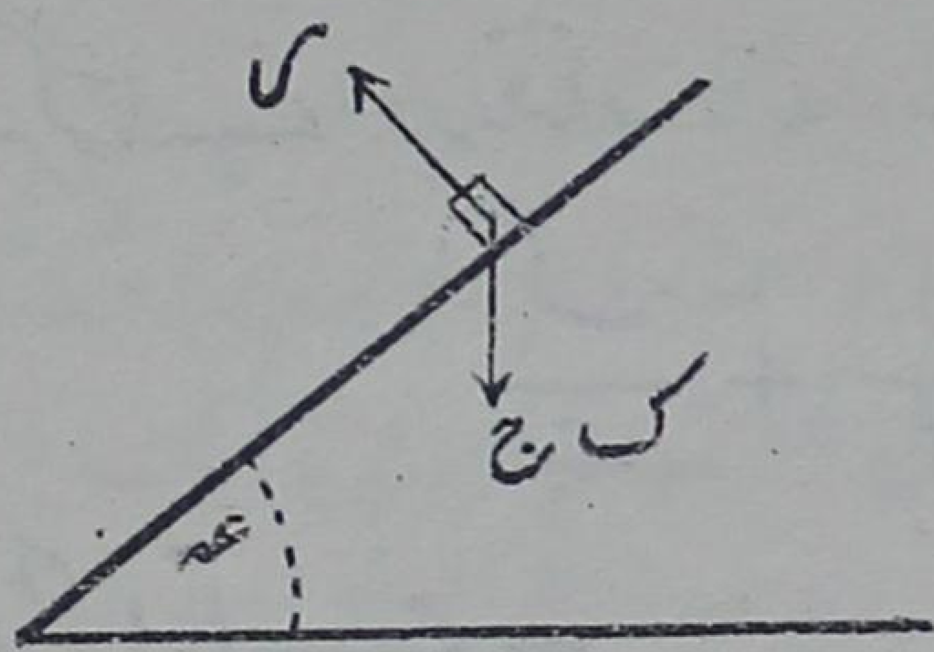
اِس کی رفتار ۹۶ فٹ ہو جاتی ہے۔ کتنی دیر تک اور کتنے فاصلہ تک مزاحمت عمل کرتی ہے۔

۱۰۔ مال کے دو ڈبے باہم جوڑے گئے ہیں اور انہیں افقی پٹڑیوں پر ایکساں قوت سے کھینچا گیا ہے چنانچہ وہ سکون سے حرکت کر کے پہلے دس ثانیوں میں ۱۰۰ فٹ کا فاصلہ طے کرتے ہیں۔ اِس کے بعد پچھلے ڈبے کو جدا کیا گیا۔ تو معلوم ہوا کہ دوسرے دس ثانیوں میں اِن دو ڈبوں کے درمیان فاصلہ ۱۵۰ فٹ ہے۔ ڈبوں کی کمیتوں کا مقابلہ کرو جبکہ ہوا وغیرہ کی کل مزاحمت نظرانداز کر دی گئی ہو۔

۱۱۔ ایک غبارہ جس کا وزن و ہے اسراع ع سے چڑھ رہا ہے۔ اگر اِس میں سے وزن و کی ریت نکال لی جائے تو غبارے کے اسراع میں اضافہ معلوم کرو جبکہ ہوا کی مزاحمت اور ریت کا تیراؤ نظرانداز کئے گئے ہوں۔

مائل مستوی پر حرکت

۱۵۸۔ فرض کرو کہ ہم ایک ذرہ کو ایک مائل مستوی پر نیچے پھسلنے دیتے ہیں جبکہ اِن دو کے درمیان تماس کامل چکنا تسلیم کر لیا گیا ہو۔ اگر ذرہ کی کمیت ک ہے تو اس پر عمل کرنے والی قوتیں دو ہیں، اِس کا وزن ک ج اور تعامل ر جو مستوی پر عمود ہے۔ وزن کا جزو ترکیبی مستوی کے نیچے وار ک ج جیب عہ ہے اور اس لیے ذرہ یکساں اسراع ج جیب عہ سے حرکت کرتا ہے۔

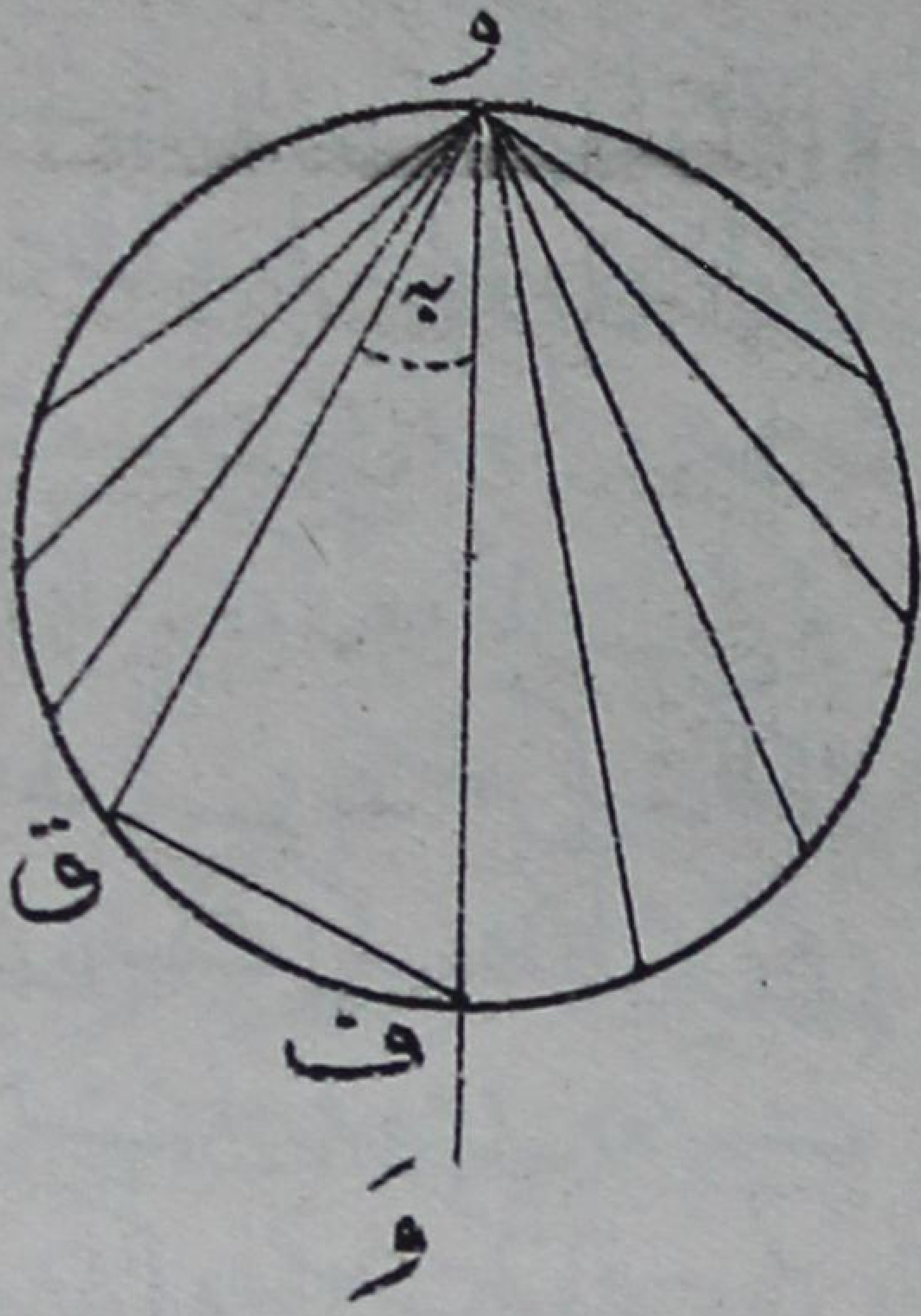


شکل (۱۰۵)

وقت ت میں جو فاصلہ طے ہوتا ہے اس کو معمولی ضابطوں سے معلوم کیا جا سکتا ہے۔ اگر ذرہ حالت سکون سے حرکت کرنا شروع کرے تو وقت ت میں وہ فاصلہ ½ ج جیب عہ × ت² طے کرے گا۔

۱۵۹۔ فرض کرو کہ نقطہ و سے بہت سے چکنے تار جن میں چکنے منکے آزادانہ

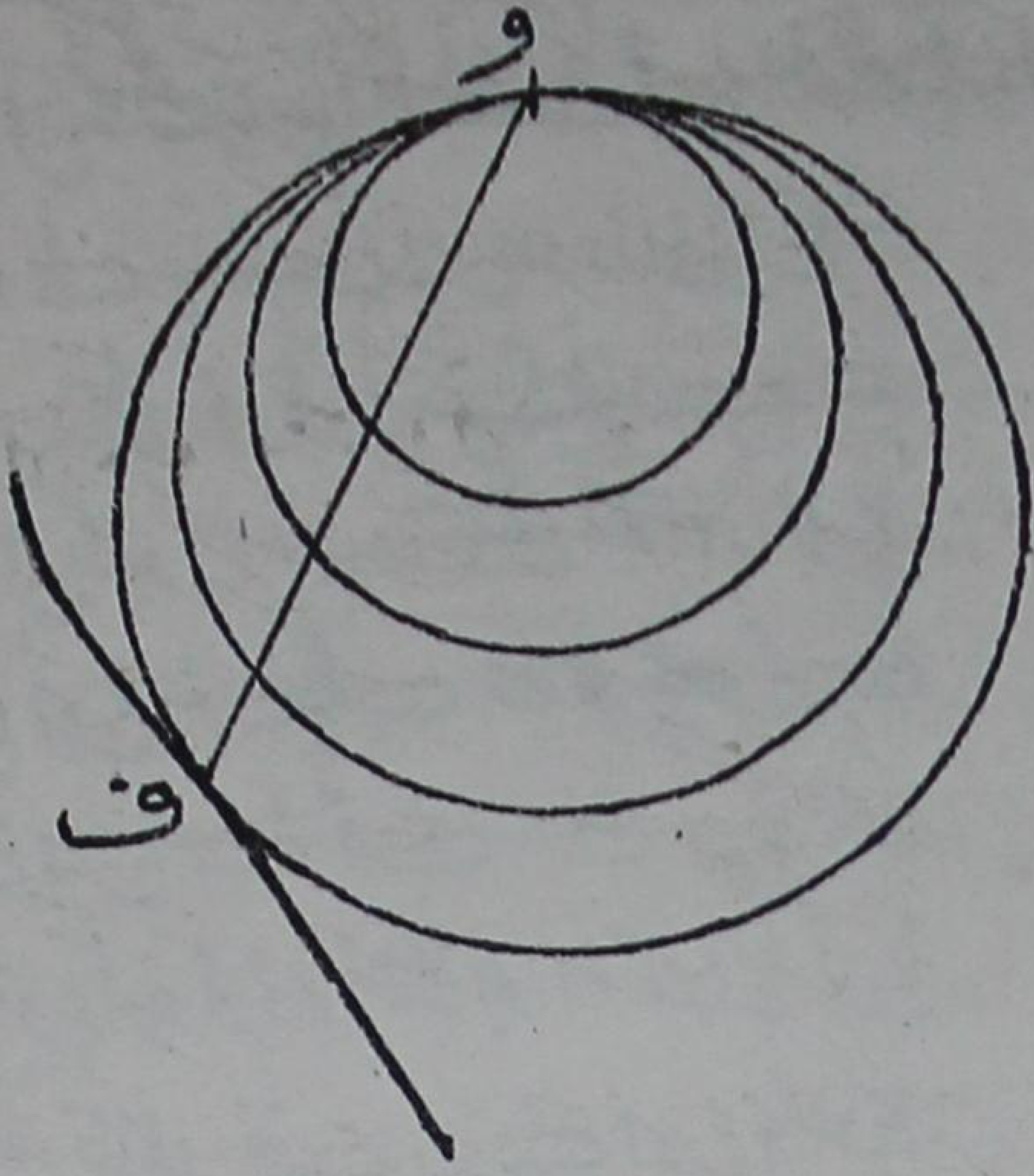
پھسل سکتے ہیں لگائے گئے ہیں۔ فرض کرو کہ یہ تار سمت انتصابی کے ساتھ تمام ممکن (۱۹۳) زاویئے بناتے ہیں اور ان میں سے ایک تار و فَ انتصابی ہے۔ خیال کرو کہ سب منکے نقطہ و پر جمع ہیں اور ایک ساتھ چھوڑے گئے ہیں۔ وقت ت کے بعد فرض کرو کہ وہ منکا جو انتصاباً گر رہا ہے نقطہ ف پر ہے اور وہ منکا جو اس تار پر پھسلتا ہے جو انتصابی سے زاویہ ہ بناتا ہے نقطہ ق پر ہے۔ یہ دوسرا منکا اسراع ج جم ہ سے حرکت کرتا ہے۔



شکل (۱۰۶)

پس و ف = $\frac{1}{2}$ ج ت^2 اور و ق = $\frac{1}{2}$ ج جم ہ × ت^2، اس لیے و ق = و ف جم ہ اور اس لیے و ق ف قائمہ زاویہ ہے۔ اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ ق اس کرہ پر ہے جس کو قطر و ف پر بنایا گیا ہو اور صریحاً یہ ہر دیگر منکے کے لیے درست ہے۔ اس طرح کسی لمحہ پر تمام منکے اس کرہ پر ہونگے جس کا بلند ترین نقطہ و ہے اور جس کا زیر ترین نقطہ و کے نیچے $\frac{1}{2}$ ج ت^2 فاصلہ پر ہے۔ پس جب حرکت جاری رہتی ہے تو منکے ایک کرہ بناتے ہوئے نظر آئیں گے جو جسامت میں مسلسل بڑھتا جائے گا لیکن اس کا بلند ترین نقطہ و پر ساکن رہے گا اور زیر ترین نقطہ جاذبہ کے تحت آزادانہ گرتا ہوا معلوم ہوگا۔

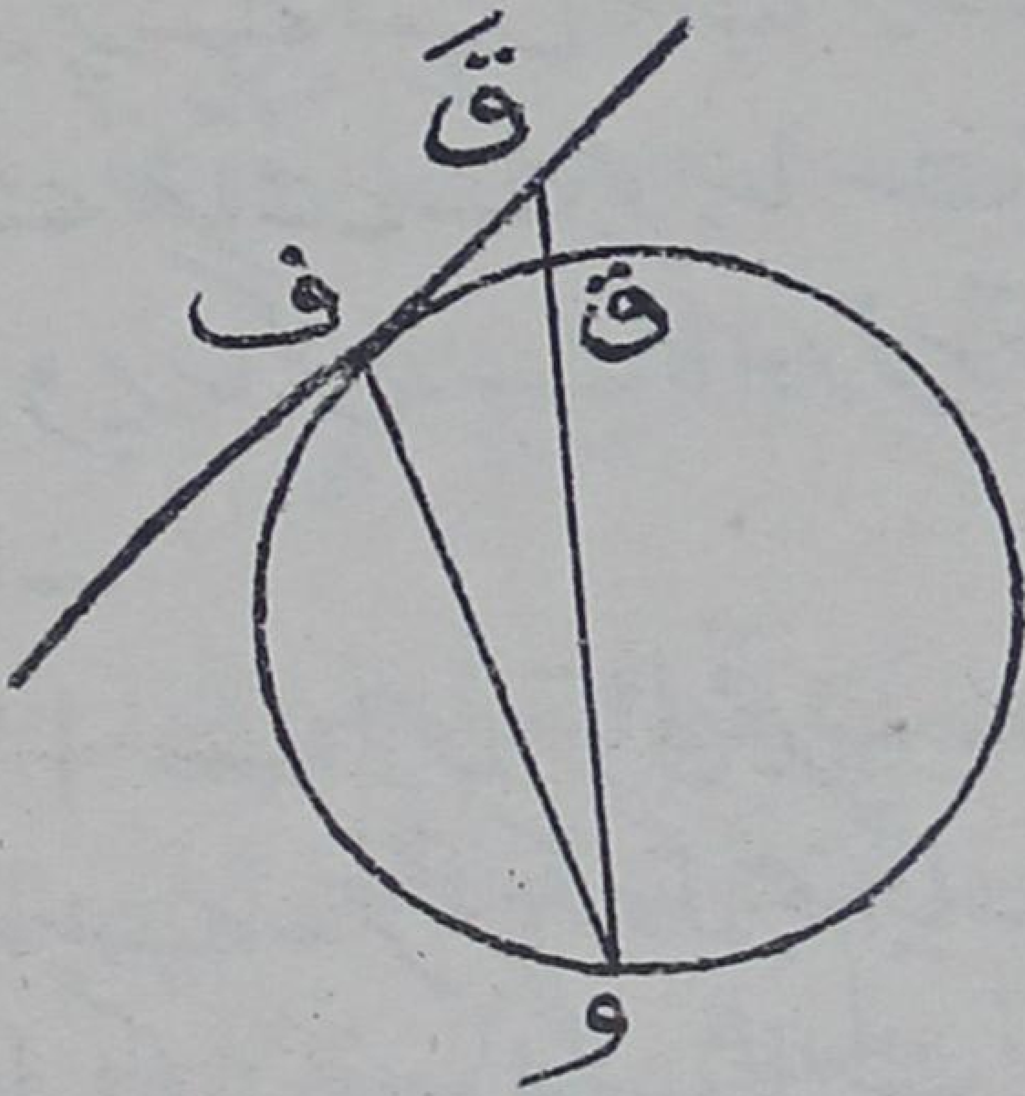
۱۶۰ — اس خیالی تجربہ سے ایک عملی مسئلہ کو حل کرنے کا طریقہ حاصل ہوتا ہے۔ فرض کرو کہ ہم ایک چکنے مستوی یا تار کو ایسے محل میں رکھنا چاہتے ہیں کہ ایک ذرہ ایک ثابت نقطہ و سے مستوی یا تار پر نیچے گذرتے ہوئے ایک معلومہ ثابت سطح تک کم سے کم ممکن وقت میں پہنچ جائے۔ فرض کرو کہ



شکل (۱۰۷)

ہم تاروں اور منکوں کے آلہ کو و پر رکھتے ہیں اور منکوں کو ایک ساتھ چھوڑتے ہیں اور اس کرہ کی جسامت کا اضافہ مشاہدہ کرتے ہیں جو منکوں سے بنتا ہے۔ جوں ہی کرہ ایسی جسامت اختیار کرتا ہے کہ وہ ثابت سطح کو کسی نقطہ ف پر مس کرنے لگتا ہے منکوں میں سے ایک منکا اس سطح پر پہنچ چکتا ہے اور مزید برین دوسرے منکوں کی بہ نسبت کم وقت میں پہنچ جاتا ہے۔ اس لیے اس نے و سے سطح تک وہ راستہ اختیار کیا ہے جس پر سے وہ سطح تک جلد سے جلد پہنچ جاتا ہے۔ یہ راستہ و ف ہے اور اب ہم اس راستہ کا تعین بغیر تجربہ کی تکمیل کے کر سکتے ہیں کیونکہ ہم جانتے ہیں کہ وہ کرہ جس کا بلند ترین نقطہ و ہے اور جو ف میں سے گذرتا ہے سطح کو ف پر مس کرنا چاہئے۔ (۱۹۴)

اسی طرح اگر ہم وہ اقل وقت معلوم کرنا چاہیں جس میں ذرہ ایک سطح سے اس کے نیچے کے ایک ثابت نقطہ و تک حرکت کرتا ہے تو ایک ایسا کرہ معلوم کرنا ہوگا جو سطح کو نقطہ ف پر مس کرے اور اس کا زیر ترین نقطہ و ہو۔ تب و ف مطلوبہ راستہ ہوگا۔ کیونکہ یہ ظاہر ہے کہ اس کرہ کے ان تمام وتروں پر سے گزرنے میں جو و میں سے کھینچے گئے ہوں جو وقت صرف ہوتا ہے ایک ہی ہے اس لئے ف و پر سے



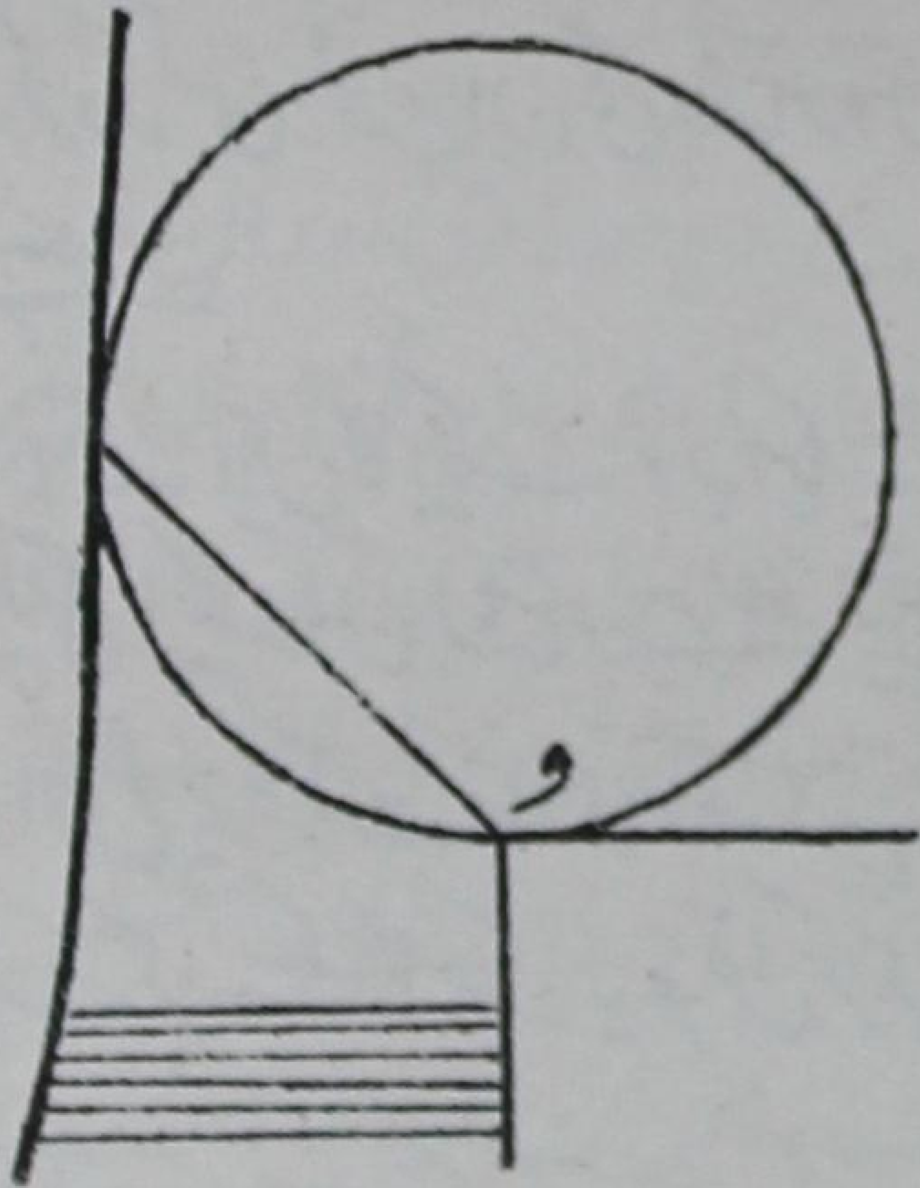
شکل (۱۰۸)

گذرنے میں جو وقت صرف ہوگا وہ اُس وقت کے مساوی ہے جو کسی وتر ق و پر سے گذرنے میں صرف ہوتا ہے اور اس لیے یہ وقت اُس وقت سے کم ہے جو سطح سے و تک پورے راستہ قَ و پر سے گذرنے میں لگتا ہے کیونکہ ق و اِس راستہ کا ایک حصہ ہے۔

توضیحی مثال

ایک جہاز اپنے چبوترے سے کچھ فاصلہ پر کھڑا ہے اور جہاز کے رُخ کے کسی نقطہ پر چبوترے سے ایک تختہ اِس طرح رکھنا مطلوب ہے کہ تختہ پر جہاز سے چبوترے تک پھسلنے کا وقت حتی الامکان کم سے کم ہو۔

صریحاً تختہ کا نچلا سِرا چبوترے کے قریب ترین نقطہ و پر ٹِکنا چاہیئے اور مسئلہ کا حل اِس مسئلہ پر منحصر ہو جاتا ہے کہ ایک کرہ کھینچا جائے جس کا زیر ترین نقطہ و ہو اور وہ جہاز کے رُخ کو مس کرے۔ یہ تسلیم کر کے کہ جہاز کا رُخ انتصابی ہے تختہ کے سروں پر کرہ کے مماس افقی اور انتصابی ہونے چاہئیں اور اس لیے تختہ کو اس طرح رکھنا چاہیئے کہ وہ سمت انتصابی کے ساتھ ۴۵° کا زاویہ بنائے۔



(۱۹۵)

شکل (۱۰۹)

مثالیں

۱۔ ایک جسم کو مائل مستوی پر جس کا زاویہ میلان ۴۵° ہے ۲۰ فٹ فی ثانیہ کی رفتار سے پھینکا گیا ہے۔ معلوم کرو کہ وہ مستوی کے اوپر کتنی دور جائے گا اور اوپر جانے میں کتنا وقت لگے گا۔

۲۔ دو ذرّے ایک دوہرے مائل مستوی کے دو رخوں پر جن کے میلان

عہ اور بہ ہیں نیچے پھسلتے ہیں سُتوی کے قاعدے تک پہنچنے میں جو اوقات وہ لیتے ہیں اُن کا مقابلہ کرو اور نیز اُنکی رفتاروں کا مقابلہ بھی کرو۔

۳ — طول ل اور ارتفاع ف کے ایک مائل مستوی پر اس کی چوٹی سے ایک جسم نیچے پھینکا گیا ہے اور اُسی آن ایک دوسرے ذرہ کو انتصاباً نیچے گرنے کے لیے چھوڑ دیا گیا ہے۔ اگر دونوں ذرّے قاعدہ سے ایک ہی وقت ٹکرائیں تو ثابت کرو کہ پہلے ذرہ کی رفتار پھینکتے وقت

$$\frac{ل^۲ - ف^۲}{ل} \sqrt{\frac{ج}{۲ف}}$$

ہونی چاہئے۔

۴ — ایک ثابت نقطے سے ایک دائرہ تک جو اُسی سُتوی میں ہے سریع ترین اُتار کا خط معلوم کرنے کے لیے عمل دریافت کرو۔

۵ — ذرّے متعدد تاروں پر جو ایک ہی نقطہ پر ملتے ہیں نیچے پھسل رہے ہیں، اِن ذروں نے اس نقطہ سے حالت سکون سے ایک ساتھ حرکت شروع کی تھی۔ ثابت کرو کہ کسی لمحہ پر اِن کی رفتاروں میں وہی نسبت ہے جو اِن کے طے کردہ فاصلوں میں ہے۔

۶ — ریل کا ایک ڈبہ ایک سطح مائل پر جس کا میلان ۲۵۰ میں ۱ ہے ۱۰ میل فی گھنٹہ کی ایکساں رفتار سے نیچے حرکت کرتا ہے اور سطح کے پائیں پر پہنچنے کے بعد ہموار سطح پر حرکت جاری رکھتا ہے۔ معلوم کرو کہ ساکن ہونے سے پیشتر وہ کتنی دور حرکت کرسکے گا جبکہ یہ فرض کر لیا گیا ہو کہ مزاحمت مستقل ہے اور حرکت کی ہر منزل میں وہی ہے۔

۷ — اگر ایک موٹر گاڑی جو ۱۰۰ کیلومیٹر فی گھنٹہ کی رفتار سے جا رہی ہو ۲۰۰ میٹر کے فاصلہ میں روکی جاسکے تو ثابت کرو کہ بریک گاڑی کو تقریباً ۵ میں ۱ میلان پر ٹھیرا سکتے ہیں۔ نیز وہ وقت معلوم کرو جس میں گاڑی کو ساکن کیا جاسکتا ہے۔

۸ — ۱۲ ٹن وزنی ڈبہ ایک ٹرین سے جو ۲۵۰ میں ۱ میلان پر نیچے ۴۰ میل فی گھنٹہ کی رفتار سے دوڑ رہی ہے الگ ہو جاتا ہے۔ رگڑ کی مزاحمت ۴۰ پونڈ وزن

فی ٹن ہے۔ معلوم کرو کہ ڈبہ ساکن ہونے سے پیشتر کتنی دُور جائے گا۔

۹۔ حراکہ کی کھینچ ایک ٹرین کی حرکت پر معمولی مزاحمتوں کے مقابلہ میں اسکے کُل وزن کا $\frac{۱}{۵}$ بڑی ہے، اور جب بریک پوری طرح ڈالے جاتے ہیں تو کُل مزاحمت اسکے وزن کا $\frac{۱}{۱۵}$ واں حصہ ہوتی ہے۔ وہ کم سے کم وقت معلوم کرو جس میں ٹرین ہموار سطح پر دو اسٹیشنوں کے درمیان جن کا درمیانی فاصلہ تین میل ہے اور جہاں گاڑی ٹھیرتی ہے سفر کر سکتی ہے۔

۱۰۔ مثال ماسبق میں وقت معلوم کرو اگر راستہ ۱۰۰ میں ا میلان پر ہو۔

ایٹوڈ کی مشین

۱۶۱۔ اگر کوئی جسم جاذبہ کے تحت آزادانہ گر رہا ہو تو راست مشاہدات سے اُس اسراع کو پیمائش کرنا مشکل ہوتا ہے جو جاذبہ کی وجہ سے پیدا ہوتا ہے کیونکہ یا تو وہ فاصلہ جس میں سے جسم گرا ہے بہت بڑا ہونا چاہئے یا گرنے کا وقت بہت کم ہونا چاہئے۔ یہ مشکلیں کچھ حد تک اُس مشین سے رفع ہوتی ہیں جو ایٹوڈ کی تجویز کردہ ہے۔

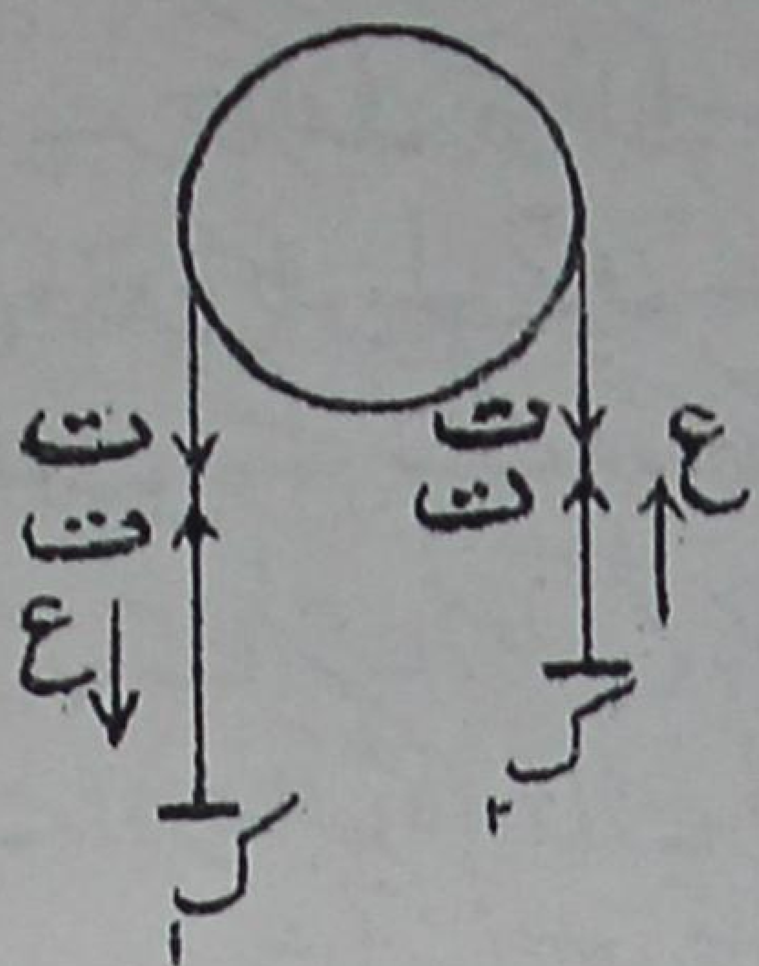
(۱۹۶) اگر ایک ڈوری کو جس کے سروں سے دو مساوی اوزان بندھے ہوں ایک چکنی انتصابی چرخی پر اس طرح رکھا جائے کہ اوزان آزادانہ لٹکیں تو یہ ظاہر ہے کہ توازن ہو گا۔ اگر اوزان نامساوی ہوں تو توازن موجود نہیں ہو سکتا۔ ایٹوڈ کی مشین میں ان اوزان کے درمیان فرق کم رکھا جاتا ہے، اس لئے حرکت سُست ہوتی ہے اور اس کی پیمائش آسانی سے کی جا سکتی ہے۔

فرض کرو کہ اوزان کی کمیتیں ک، ک٫ ہیں جن میں سے ک٫ بڑا ہے۔

فرض کرو کہ جب ان اوزان کو آزاد چھوڑ دیا جاتا ہے تو ک٫ اسراع ع سے نیچے اُترتا ہے۔ ڈوری کو ناامتدادپذیر سمجھنے سے ک٫ کو اسراع ع سے اوپر چڑھنا چاہئے۔

فرض کرو کہ ڈوری غیر وزنی ہے اور اس لیے اس کے کسی عنصر کی کمیت کو نظرانداز کیا جا سکتا ہے۔ پس حرکت کے دوسرے قانون سے

معلوم ہوتا ہے کہ ڈوری کے کسی عنصر پر عمل کرنے والی حاصل قوت معدوم ہونی چاہئے۔ اس لیے ڈوری پر عمل کرنے والی قوتیں توازن میں ہونی چاہئیں (اگرچہ کہ ڈوری ساکن نہیں ہے) اور اس لیے حسب دفعہ (۵۴) تمام نقطوں پر تناؤ وہی ہونا چاہئے، فرض کرو کہ یہ تناؤ ت ہے۔



شکل (۱۱۰)

کمیتوں ک۱، ک۲ میں سے ہر ایک پر عمل کرنے والی قوتیں اس کے وزن پر جو نیچے وار عمل کرتا ہے اور ڈوری کے تناؤ پر جو اوپر وار عمل کرتا ہے مشتمل ہیں۔ اس لیے ان دو کمیتوں پر نیچے وار حاصل قوتیں علی الترتیب $\text{ک}_1\text{ج} - \text{ت}$ اور $\text{ک}_2\text{ج} - \text{ت}$ ہیں۔ پس حرکت کی مساواتیں ہیں

$$\text{ک}_1\text{ج} - \text{ت} = \text{ک}_1\text{ع}$$

$$\text{ک}_2\text{ج} - \text{ت} = -\text{ک}_2\text{ع}$$

اگر ت کو ساقط کیا جائے تو

$$\text{ع} = \frac{\text{ک}_1 - \text{ک}_2}{\text{ک}_1 + \text{ک}_2}\,\text{ج} \qquad (۴۹)$$

جس سے اسراع معلوم ہوتا ہے۔ اگر ع کو ساقط کیا جائے تو ت کی قیمت حاصل ہوتی ہے

$$\text{ت} = \frac{2\,\text{ک}_1\text{ک}_2}{\text{ک}_1 + \text{ک}_2}\,\text{ج} \qquad (۵۰)$$

یہ ظاہر ہے کہ اگر ک۱ تقریباً ک۲ کے مساوی ہو تو اسراع چھوٹا ہوگا۔ مثلاً اگر اوزان ۱۰۰ اور ۱۰۱ گرام ہوں تو

$$\text{ع} = \frac{1}{201}\,\text{ج} = ۰٫۱۶ \text{ فٹ فی ثانیہ فی ثانیہ}$$

اتنا چھوٹا اسراع آسانی سے پیمائش کیا جا سکتا ہے کیونکہ زیادہ وزنی کمیت (۱۹۷)
۱۰ ثانیوں میں صرف ۸ فٹ نیچے اُترے گی۔ عملاً یہ دشواری پیدا ہوتی ہے کہ اگر
وزنوں کے فرق کو بہت چھوٹا کر دیا جائے تو چرخی پر عمل کرنے والی قوتیں اس قدر
برابر متوازن ہوتی ہیں کہ اِن کا فرق سہاروں کی رگڑ وغیرہ پر غالب آنے کے لیے کافی
نہیں ہوتا۔

متحرک فریم کے حوالے سے حرکت

۱۶۲۔ ہم دیکھ چکے ہیں (دفعہ ۲۵) کہ حرکت کا دوسرا قانون درست رہتا ہے
جبکہ حرکت کو ایک ایسے فریم کے لحاظ سے پیمائش کیا گیا ہو جو ساکن نہیں ہے
بلکہ ایکساں رفتار سے حرکت کر رہا ہے۔ اب اِس قانون میں ترمیم
کرنا آسان ہے جبکہ حوالے کا فریم ایک معلومہ اسراع کے ساتھ حرکت کرے۔

فرض کرو کہ حوالے کے فریم کا اسراع عہ ہے اور فرض کرو کہ اِس اسراع
عہ کی سمت میں ایک متحرک ذرہ کے اسراع کا جزو ترکیبی ع ہے اور فرض کرو کہ
ذرہ پر عمل کرنے والی قوت کا جزو ترکیبی اِس سمت میں ف ہے۔ حرکت کے
دوسرے قانون کی رو سے

$$ف = ک عَ \qquad (۵۱)$$

جہاں عَ وہ ترکیبی اسراع ہے جو ساکن حوالے کے فریم کے لحاظ سے ہے۔ لیکن
اِس اسراع عَ کو دو اسراعوں کا مرکب خیال کیا جا سکتا ہے جن میں سے ایک
ذرہ کا اسراع ع ہے جو متحرک حوالے کے فریم کے لحاظ سے ہے اور دوسرا
اس فریم کا اسراع عہ ہے جو ساکن حوالے کے فریم کے لحاظ سے ہے۔
چونکہ یہ سب اسراع ایک ہی سمت میں ہیں اس لیے $عَ = ع + عہ$ اور اسلیے
مساوات (۵۱) ہو جاتی ہے

$$ف = ک (ع + عہ)$$

اِس کو ہم شکل

$$ف - ک عہ = ک ع \qquad (۵۲)$$

میں بھی لکھ سکتے ہیں۔ پس معلوم ہوا کہ حرکت وہی ہے گویا کہ فریم ساکن ہے بشرطیکہ ہم خیال کریں کہ قوت ف کو بقدر ک عہ کے گھٹا دیا گیا ہے۔

اِس نتیجہ کی طبیعی توجیہ آسانی سے کی جاسکتی ہے۔ قوت ف کا ایک حصہ جو ک عہ کے مساوی ہے ذرہ کو متحرک حوالے کے فریم کی حرکت کے ساتھ متحرک کرنے میں صرف ہوتا ہے۔ صرف مابقی حصہ ف ۔ ک عہ ہی ہے جو متحرک فریم کے لحاظ سے اسراع پیدا کرنے میں کار آمد ہے۔

۱۶۳ ـ فریم جو انتصابی اسراع کے ساتھ حرکت کرے۔ (۱۹۸)

اگر حوالے کا فریم اسراع عہ کے ساتھ نیچے وار انتصاباً حرکت کرے تو ہم دیکھتے ہیں کہ اس فریم کے لحاظ سے اسراعوں کو پیمائش کرنے سے پیشتر کمیت ک کے ہر ذرہ پر عمل کرنے والی قوت کے انتصابی جزو ترکیبی کو بقدر ک عہ کے تخفیف شدہ سمجھنا چاہیئے۔ خواہ کوئی قوتیں عمل کریں اِن میں ذروں کے اوزان ک ج وغیرہ ضرور ہوں گے۔ ہم بہ آسانی تخفیف ک عہ کو ان سے وضع کردہ فرض کرسکتے ہیں چنانچہ کسی ذرہ کے وزن کو ک ج لینے کی بجائے ک (ج ـ عہ) لینا ہوگا۔

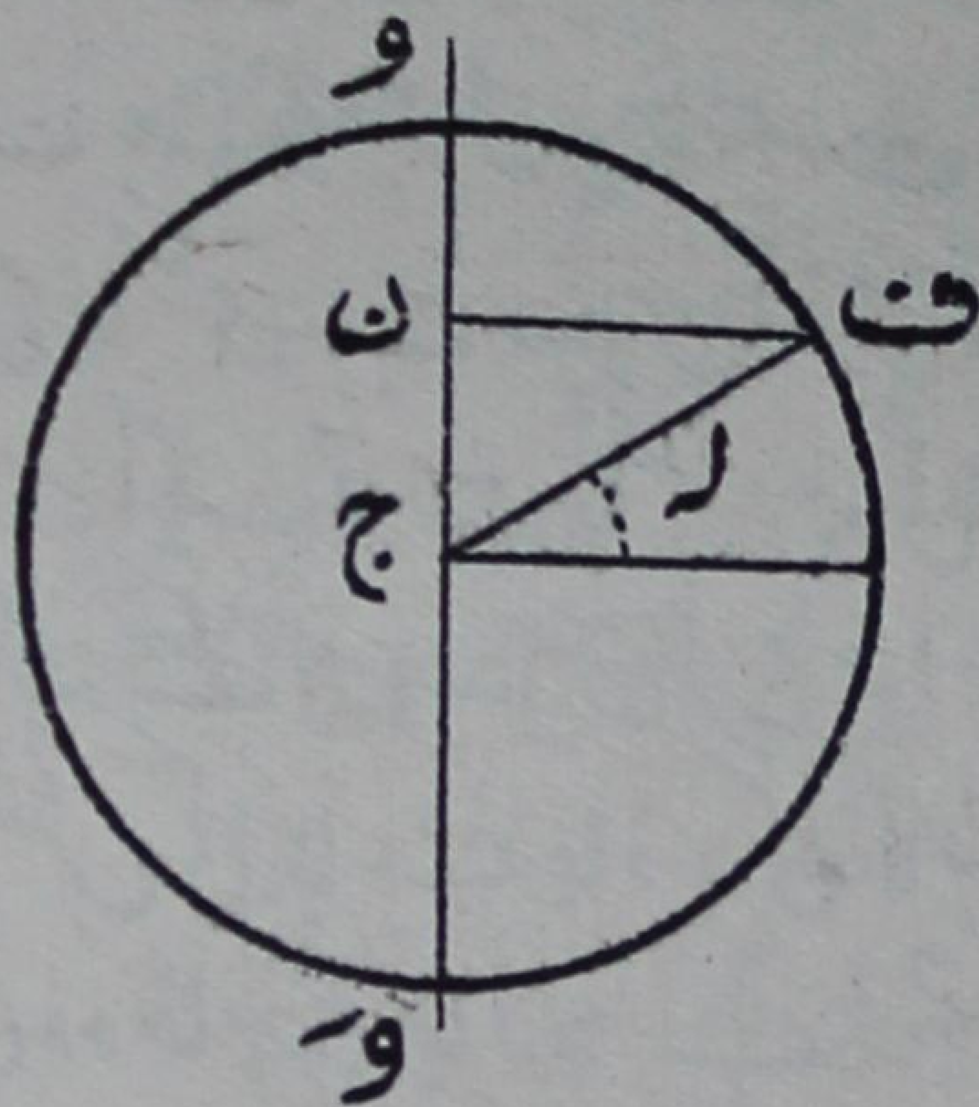
اِس طرح حوالے کے فریم کے اسراع کی رعایت یہ فرض کرکے رکھی جاسکتی ہے کہ اسراع بوجہ جاذبہ ج کی بجائے ج ـ عہ میں تخفیف ہوا ہے۔ مثلاً اگر ایٹوڈ کی مشین کو آلہ باربردار میں رکھا جائے تو اس آن جس پر آلہ کا اسراع اوپر وار عہ ہو کمیتوں کا اسراع مشین کے لحاظ سے (مقابلہ کرو مساوات ۹۴ کے ساتھ)

$$ع = \frac{ک_۱ - ک_۲}{ک_۱ + ک_۲} (ج + عہ)$$

ہوگا اور ڈوری کا تناؤ (دیکھو مساوات (۵۰))

$$\text{ت} = \frac{\text{۲ک}_1\text{ک}_2}{\text{ک}_1 + \text{ک}_2}(\text{ج} + \text{ع})$$ ہوگا۔

۱۶۴۔ ج کی قیمت پر زمین کی گردش کا اثر۔ ہم دیکھ چکے ہیں (دفعہ ۲۵) کہ حوالے کا فریم جو زمین کی سطح کے لحاظ سے ثابت ہو زمین کے محور کے گرد اس کی گردش کے باعث ایک اسراع رکھتا ہے۔



شکل (۱۱۱)

فرض کرو کہ زمین کا محور و وَ ہے اور فرض کرو کہ زمین کی سطح پر عرض بلد ل میں کوئی نقطہ ف ہے۔ زمین کو نصف قطر ا کا ایک کرہ سمجھنے سے نقطہ ف، نصف قطر ا جم ل کا ایک دائرہ مرتسم کریگا جس کا مرکز زمین کے محور پر نقطہ ن ہوگا۔ اگر و وہ رفتار ہو جس سے نقطہ ف یہ دائرہ مرتسم کرتا ہے تو ف کا اسراع حسب دفعہ ۱۲، $\frac{\text{و}^2}{\text{ا جم ل}}$ دائرہ کے مرکز کی جانب ہوگا یعنی ف ن کی سمت میں۔

فرض کرو کہ زمین کی زاوئی رفتار سہ ہے یعنی فرض کرو کہ وہ فی اکائی وقت سہ نیم قطری زاوئے میں سے گردش کرتی ہے۔ اب جس وقت میں ف ایک مکمل دائرہ مرتسم کرتا ہے اسی وقت میں زمین ایک مکمل گردش کرلیتی ہے یعنی $\frac{\text{۲}\pi}{\text{سہ}}$، یہ وقت $\frac{\text{۲}\pi\text{ ا جم ل}}{\text{و}}$ کے بھی مساوی ہے۔ اس لیے (۱۹۹)

$$\text{و} = \text{ا سہ جم ل}$$

اب حوالے کے فریم کا اسراع سمت ف ن میں

$$\frac{\text{و}^2}{\text{ا جم ل}} = \text{سہ}^2\text{ ا جم ل}$$

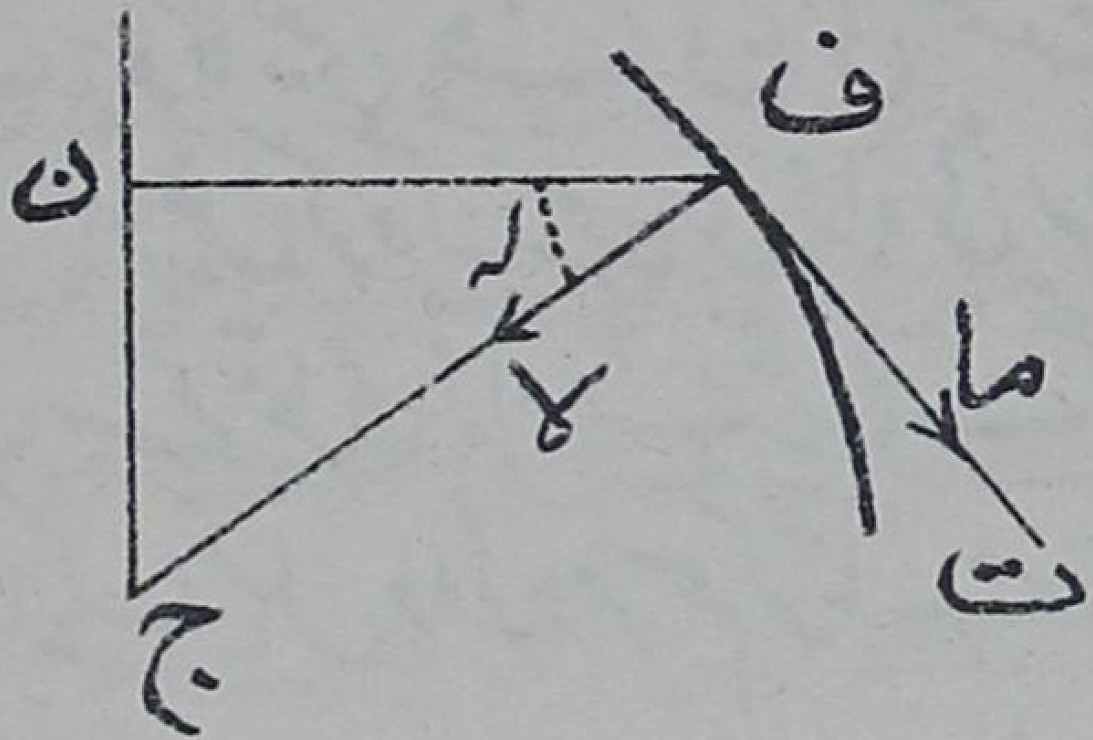
ہے۔ اِس لیے اُس فریم کے حوالے سے جو ف کے ساتھ حرکت کر رہا ہے کسی ذرہ کی حرکت کو محسوب کیا جا سکتا ہے گویا کہ حوالے کا فریم ساکن ہے بشرطیکہ سمت ف ن میں قوت کے جزو ترکیبی کو بقدر ک سہ۲ اجم لہ کے گھٹا دیا گیا ہو۔

پس کُل قوت عاملہ اُن قوتوں پر جو فی الواقعی عمل کرتی ہیں اور ایک قوت ک سہ۲ اجم لہ پر جو سمت ن ف میں عمل کرتی ہوئی فرض کی جائے مشتمل سمجھی جا سکتی ہے۔ اِس آخری قوت کو زمین کی کشش کے ساتھ مرکب کرنے سے ایک قوت حاصل ہوگی جس کو ہم ف پر جاذبہ کی ظاہری قوت کہہ سکتے ہیں۔ اِس طرح حوالے کے فریم کی حرکت کی رعایت زمین کی اصلی کشش کی بجائے جاذبہ کی ظاہری قوت کو استعمال کرنے سے رکھی جا سکتی ہے۔ یہی وہ ظاہری جاذبہ ہے جو تجربی طور پر متعین ہوتا ہے اور ہمیشہ کسی نقطہ پر ذرہ کے وزن سے یہی جاذبہ مُراد لیا جاتا ہے۔

نقطہ ف پر کسی جسم کا ظاہری وزن معلوم کرنے کے لیے اس کے اصلی وزن (فرض کرو) ک ج کو ایک قوت ک سہ۲ ع جم لہ کے ساتھ جو ن ف پر عمل کرتی ہے مرکب کرنا ہوگا۔ فرض کرو کہ اِس آخری قوت کو سمتوں ف ج اور ف ت میں اجزائے ترکیبی

ک سہ۲ اجم۲ لہ، ک سہ۲ اجم لہ جب لہ

میں تحلیل کیا گیا ہے جہاں ف ت نقطہ ف پر مماس ہے۔



شکل (۱۱۲)

سمت ف ج میں عمل کرنیوالی قوت ک ج کے ساتھ مرکب کرنے سے ظاہری وزن کے اجزائے ترکیبی لا، ما علی الترتیب سمتوں ف ج، ف ت میں حسب ذیل حاصل ہوتے ہیں

لا = ک (ج ـ سہ۲ اجم۲ لہ) (۵۳)

ما = ک سہ۲ اجم لہ جب لہ (۵۴)

(۲۰۰) مربع لینے اور جمع کرنے اور ظاہری وزن کو حسب معمول ک ج سے تعبیر کرنے سے حاصل ہوتا ہے

ک^۲ ج^۲ = ﻻ^۲ + ما^۲ = ک^۲ (ج^۲ - ۲ سہ^۲ ا ج جم^۲ لہ + سہ^۴ ا^۲ جم^۲ لہ)،

(۵۵)

زمین کے قطر کو ۷۹۲۰ میل اور ج کی قیمت کو (جو قطب شمالی پر اسراع بوجہ جاذبہ عرض ہے) ۳۲،۲۵ لینے سے آسانی سے معلوم ہوتا ہے کہ

سہ^۲ ا / ج = ۱ / ۲۹۰ ، تقریباً

اس کا مربع اس قدر چھوٹا ہے کہ اس کو پہلے تقرب کی حد تک نظر انداز کیا جا سکتا ہے اور مساوات (۵۵) کو شکل

ج = ج - سہ^۲ ا جم^۲ لہ

میں لکھا جا سکتا ہے۔

اس طرح عرض بلد لہ میں ظاہری وزن اصلی وزن سے بقدر ک سہ^۲ ا جم^۲ لہ کے کم ہوتا ہے یا تقریباً کل وزن کا ۱/۲۹۰ جم^۲ لہ کے کم ہوتا ہے۔

ظاہری وزن نصف قطر ج ف پر عمل نہیں کرتا۔ اگر ہم اس کو نصف قطر کے ساتھ زاویہ طہ بناتی ہوئی سمت میں عمل کرتا ہوا فرض کریں تو مساواتوں (۵۳) اور (۵۴) سے حاصل ہوگا

مس طہ = ما / ﻻ = سہ^۲ ا جم لہ جب لہ / (ج - سہ^۲ ا جم^۲ لہ)

= ۱/۲۹۰ جم لہ جب لہ ، تقریباً

اس سے کسی نقطہ پر زمین کے نصف قطر سے خط شاقول کا انحراف حاصل ہوگا۔

متحرک اجسام کے درمیان رگڑ کے تعاملات

۱۶۵ — تجربہ سے یہ معلوم ہوا ہے کہ ربط

ف = مہ ر

(جس میں ف اور ر، دو اجسام کے درمیان تعامل کے مماسی اور عمادی اجزائے ترکیبی ہیں) بڑی حد تک درست رہتا ہے جبکہ اجسام ایک دوسرے پر سے پھسل رہے ہوں۔ رگڑ کی قدر مہ کی قیمت بالکل وہی نہیں ہوتی ہے جو اجسام کے ساکن ہونے کی صورت میں ہوا کرتی ہے بلکہ حرکت کی صورت میں مہ کی قیمت ہمیشہ قدرے بڑی ہوتی ہے۔

دو جسموں کے درمیان رگڑ جبکہ اجسام ایک دوسرے پر پھسل رہے ہوں حرکی رگڑ کہلاتی ہے، لیکن اگر اجسام ساکن ہوں تو اس کو سکونی رگڑ کہتے ہیں۔

توضیحی مثالیں

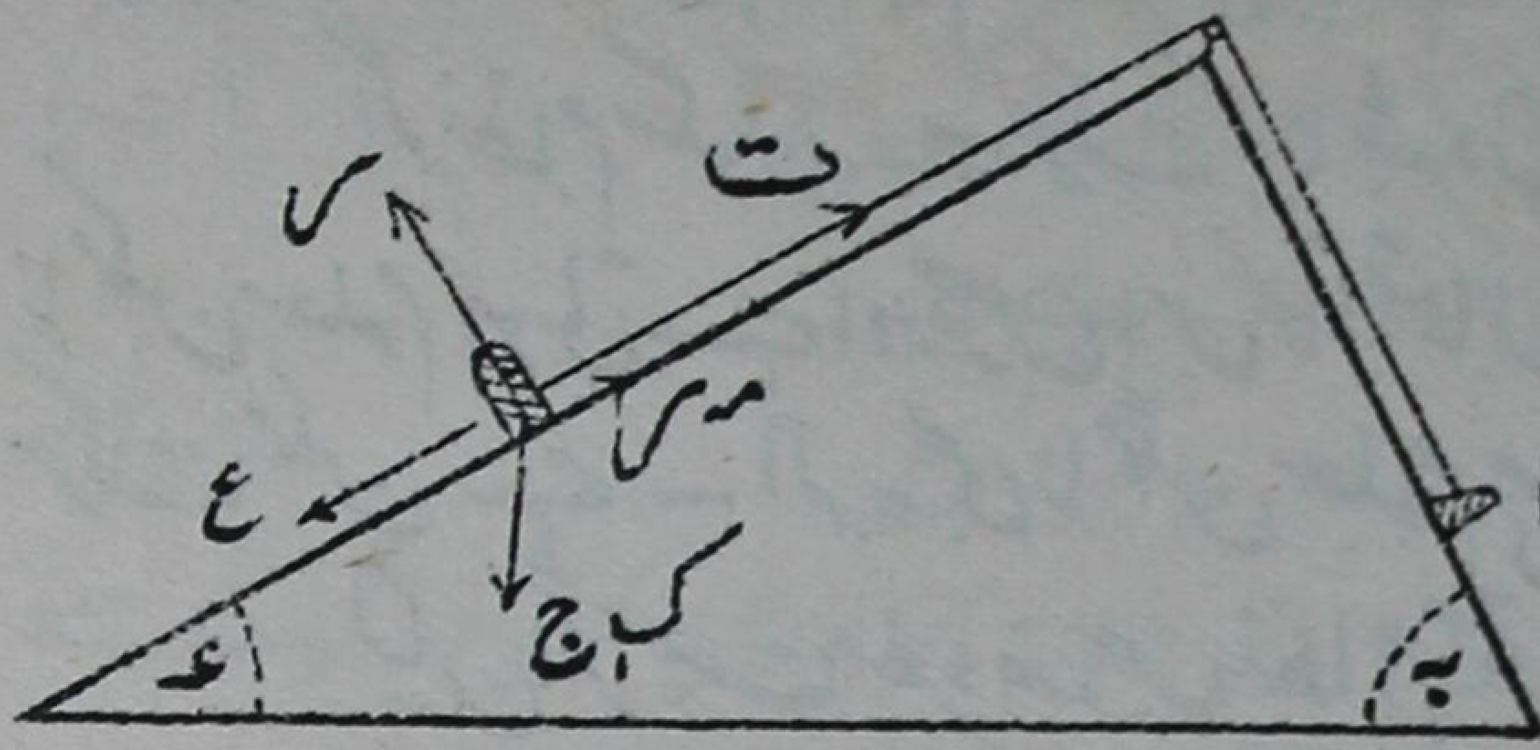
۱۔ کمیتیوں ک۱ اور ک۲ کے دو ذرے، زاویوں ع اور یہ کے دو مائل مستویوں پر جو ایک دوسرے سے جڑے ہوئے ہیں رکھے ہیں اور وہ ایک ڈوری کے ذریعہ مربوط ہیں جو مستویوں کے سرے پر کی ایک چکنی چرخی پر سے گذرتی ہے۔ اگر ذروں اور مستویوں کے درمیان رگڑ کی قدریں مہ۱، مہ۲ ہوں تو حاصل حرکت معلوم کرو۔

اگر حرکت فی الواقعی وقوع پذیر ہوتی ہے تو ایک ذرہ ک۱ (فرض کرو) کو اپنے مستوی پر نیچے وار حرکت کرنی چاہئے اور دوسرے ک۲ کو اوپر وار۔ چونکہ ڈوری ناامتداد پذیر ہے اس لیے ہر ایک ذرہ کا اسراع وہی ہوگا، فرض کرو کہ یہ اسراع سمت حرکت میں ع ہے۔

پہلے ذرہ پر عمل کرنے والی قوتیں حسب ذیل ہیں:

(ا) اِس کا وزن ک$_1$ج انتصاباً نیچے وار،

(ب) ڈوری کا تناو ت مستوی کے اوپر وار،



(ج) مستوی کا تعامل۔ فرض

شکل (۱۱۳)

کرو کہ اِس کو مستوی کے عمود وار اور مستوی کے اوپر وار سمت میں اجزاء ر اور مہ ر میں تحلیل کیا گیا ہے۔

چونکہ مستوی کے عماد کی سمت میں ذرہ ک$_1$ کا کوئی اسراع نہیں ہے اِس لئے حاصل قوت کا جزو ترکیبی اِس سمت میں صفر ہونا چاہئے۔ پس اِس سمت میں تحلیل کرنے سے

ر ـ ک$_1$ ج جم عہ = ۰

مستوی کے نیچے وار تحلیل کرنے سے

ک$_1$ج جب عہ ـ مہ ر ـ ت = ک$_1$ ع

اور اگر ہم نامعلوم تعامل ر کو ساقط کریں تو

ک$_1$ ج (جب عہ ـ مہ جم عہ) ـ ت = ک$_1$ ع (ا)

اسی طرح کی مساوات دوسرے ذرہ کی حرکت کے لیے حاصل کیجا سکتی ہے۔ یعنی

ک$_2$ ج (جب بہ + مہ جم بہ) ـ ت = ـ ک$_2$ ع (ب)

ع کے لیے اِن مساواتوں (ا) اور (ب) کو حل کرنے سے اسراع حاصل ہوتا ہے

ع = [ک$_1$ (جب عہ ـ مہ جم عہ) ـ ک$_2$ (جب بہ + مہ جم بہ)] / [ک$_1$ + ک$_2$] ج (ج)

اگر ع کی یہ قیمت منفی نکلے تو ہم دیکھتے ہیں کہ اسراع اُس سمت میں نہیں ہوسکتا

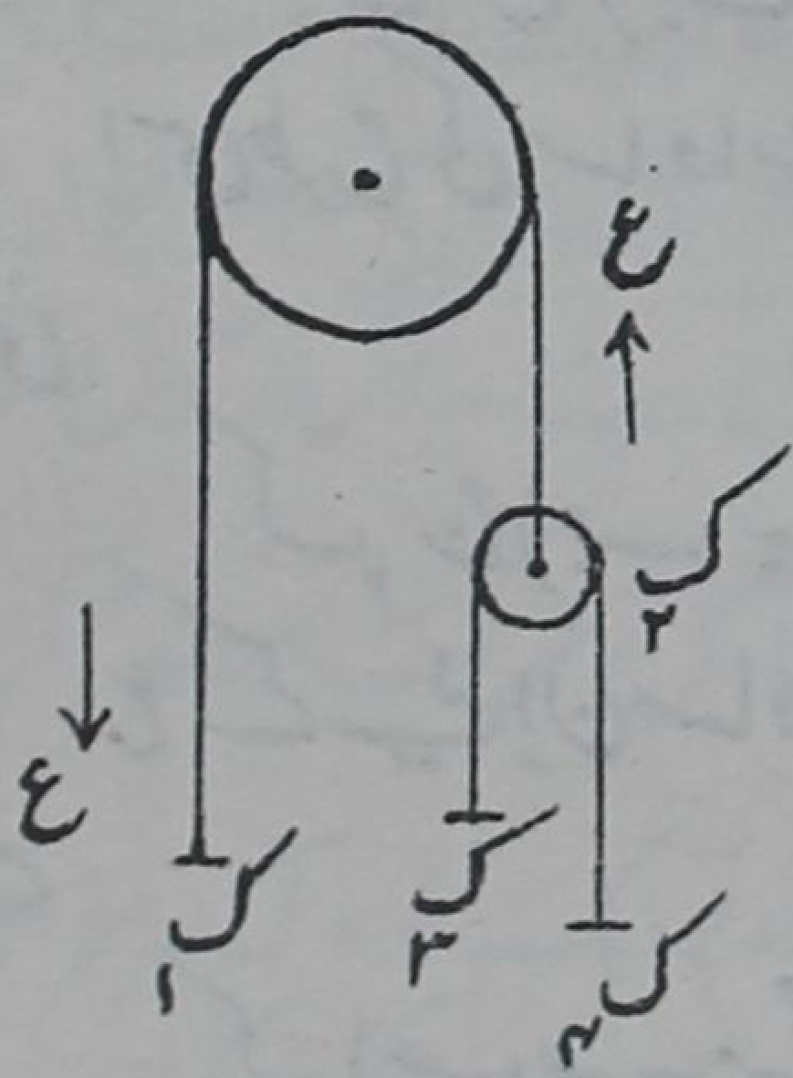
جس میں حرکت کا واقع ہونا ہم نے فرض کیا ہے۔

اگر نظام سکون سے حرکت کرنا شروع کرتا ہے تو مفروضہ سمت میں حرکت ناممکن معلوم ہوتی ہے اور ہمیں اس کا امتحان کرنا چاہئے کہ آیا مخالف سمت میں حرکت ممکن ہے۔ اگر یہ بھی ناممکن معلوم ہو جائے تو نظام ساکن رہے گا۔

(۲۰۲) لیکن اگر سمت مفروضہ میں نظام متحرک ہوا ہے تو مساوات (ج) سے حاصل شدہ اسراع عمل میں آجائے گا اور وہ مثبت ہوگا تو رفتار میں اضافہ ہوگا اور منفی ہوگا تو رفتار گھٹیگی۔ اس آخری صورت میں نظام کسی وقت ساکن ہو جائے گا اور پھر ہمیں امتحان کرنا چاہئے کہ آیا وہ سمت مخالف میں حرکت کرنا شروع کرے گا یا نہیں۔

۲۔ ایٹوڈ کی مشین کی ڈوری کے ایک سرے سے کمیت $ک_{۱}$ کا ایک وزن بندھا ہے۔ دوسرے سرے پر کمیت $ک_{۲}$ کی ایک چرخی لگی ہوئی ہے جس پر سے ایک ڈوری گذرتی ہے جس کے سروں سے کمیتیں $ک_{۳}$، $ک_{۴}$ لٹک رہی ہیں۔ حرکت معلوم کرو۔

فرض کرو کہ کمیت $ک_{۱}$ کا اسراع ع ہے جس کو نیچے وار پیمائش کیا گیا ہے۔



شکل (۱۱۴)

تب $ک_{۲}$ کا اسراع اوپر وار ع ہونا چاہئے۔

کمیتیں $ک_{۳}$، $ک_{۴}$ سے خود ایک ایٹوڈ کی مشین کا نظام حاصل ہوگا جو کُل کا کل اسراع ع سے اوپر وار حرکت کرے گا۔ پس اس مشین کی ڈوری کا تناؤ $ت_{۱}$ (فرض کرو) حسب ذیل ہے (دیکھو دفعہ ۱۶۳):

$$ت_{۱} = \frac{۲ ک_{۳} ک_{۴}}{ک_{۳} + ک_{۴}} (ج + ع)، \quad (۱)$$

اگر اس ڈوری کے تناؤ کو جو $ک_{۱}$ اور $ک_{۲}$ کو ملاتی ہے $ت_{۲}$ سے تعبیر کریں تو

ک_2 کے لئے حرکت کی حسب ذیل مساوات حاصل ہوتی ہے :

$$\text{ت}_2 - \text{ک}_2\,\text{ج} - 2\,\text{ت}_1 = \text{ک}_2\,\text{ع} \qquad (\text{ب})$$

اور ک_1 کے لئے حرکت کی مساوات ہے

$$\text{ک}_1\,\text{ج} - \text{ت}_2 = \text{ک}_1\,\text{ع} \qquad (\text{ج})$$

مساواتوں (ا)، (ب)، (ج) سے ت_1 اور ت_2 کو ساقط کرنے سے اسراع ع کی قیمت حسب ذیل حاصل ہوتی ہے

$$\text{ع} = \frac{\text{ک}_1 - \text{ک}_2 - \dfrac{4\,\text{ک}_3\,\text{ک}_4}{\text{ک}_3 + \text{ک}_4}}{\text{ک}_1 + \text{ک}_2 + \dfrac{4\,\text{ک}_3\,\text{ک}_4}{\text{ک}_3 + \text{ک}_4}}\,\text{ج}$$

کمیتوں ک_3، ک_4 کے اسراع بلحاظ ک_2 کے دفعہ ۱۶۳ کی رو سے حسب ذیل معلوم ہوتے ہیں :-

$$\pm \frac{\text{ک}_3 - \text{ک}_4}{\text{ک}_3 + \text{ک}_4}\,(\text{ج} + \text{ع})$$

۳ — ایک افقی دائرہ پر مساوی فاصلوں سے ن چھوٹے چکنے چھلّے ثبت کردئے گئے ہیں اور اِن حلقوں میں سے ایک بے سرا تاگا بالترتیب گذرتا ہے۔ اگر چھلّوں کے ہر متصلہ زوج کے درمیانی حصہ کے تاگے سے علی الترتیب کمیتوں ف، ق، ر، ... کی ن چرخیاں سہاری گئی ہوں اور ڈوری کے وہ حصے جو چرخیوں کو مس نہیں کرتے انتصابی ہوں تو ثابت کرو کہ چرخی ف، اسراع

$$\frac{\dfrac{1-\text{ن}}{\text{ف}} + \dfrac{1}{\text{ق}} + \dfrac{1}{\text{ر}} + \cdots}{\dfrac{1}{\text{ف}} + \dfrac{1}{\text{ق}} + \dfrac{1}{\text{ر}} + \cdots}\,\text{ج}$$

کے ساتھ نیچے اترے گی

(۲۰۳)

ڈوری کا تناؤ اپنے پورے طول پر وہی ہونا چاہیئے، فرض کرو کہ یہ تناؤ ت ہے۔ اگرچہ چرخیوں کے اسراع سب کے سب نیچے وار پیمائش شدہ $\text{ع}_{\text{ف}}$، $\text{ع}_{\text{ق}}$، ..... ہوں تو حسب ذیل نمونے کی حرکت کی مساواتیں حاصل ہونگی

$$\text{ف}\,\text{ج} - ۲\,\text{ت} = \text{ف}\,\text{ع}_{\text{ف}} \qquad (۱)$$

اور اس نمونے کی مساوات ہر چرخی کے لیے ایک ہو گی۔ ان مساواتوں میں نامعلوم مقدار ت اور ن نامعلوم مقداریں $\text{ع}_{\text{ف}}$، $\text{ع}_{\text{ق}}$، ..... داخل ہوتی ہیں۔

اس طرح نامعلوم مقداروں کی تعداد ن + ۱ ہے اور ان میں صرف ن مساواتیں اب تک حاصل ہوئی ہیں۔ اس لیے ایک اور مساوات چاہیئے اور یہ مساوات اس امر سے حاصل ہوتی ہے کہ اسراع $\text{ع}_{\text{ف}}$، $\text{ع}_{\text{ق}}$، ..... غیر تابع نہیں ہو سکتے کیونکہ ڈوری کا طول غیر متغیر رہنا چاہیئے۔

فرض کرو کہ افقی دائرہ کے نیچے ف، ق، ..... کی گہرائیاں $\text{گ}_{\text{ف}}$، $\text{گ}_{\text{ق}}$، ..... سے تعبیر ہوتی ہیں تو

$$\text{گ}_{\text{ف}} + \text{گ}_{\text{ق}} + \ldots\ldots$$

کو پوری حرکت میں مستقل ہونا چاہیئے۔ اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ

$$\text{ع}_{\text{ف}} + \text{ع}_{\text{ق}} + \ldots = ۰$$

اب مساوات (۱) سے $\text{ع}_{\text{ف}}$، $\text{ع}_{\text{ق}}$، ..... کی قیمتیں درج کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\left(\text{ج} - \frac{۲\,\text{ت}}{\text{ف}}\right) + \left(\text{ج} - \frac{۲\,\text{ت}}{\text{ق}}\right) + \ldots = ۰$$

اس لیے

$$۲\,\text{ت} = \frac{\text{ن}\,\text{ج}}{\frac{۱}{\text{ف}} + \frac{۱}{\text{ق}} + \ldots}$$

شکل (۱۱۵)

اور مساوات (ا) میں ۲ ت کی بجائے یہ قیمت درج کرنے پر ع ن کی مطلوبہ
قیمت حاصل ہوتی ہے۔

مثالیں

۱۔ ثابت کرو کہ ایٹوڈ کی مشین میں ڈوری کا تناؤ اس سے لٹکی ہوئی دو کمیتوں کے
اوزان کے درمیان ہوتا ہے۔ نیز ثابت کرو کہ یہ تناؤ ان وزنوں میں سے بڑے کی
بہ نسبت چھوٹے سے قریب تر ہوتا ہے۔

۲۔ ۱۶ اور ۱۴ اونس کے دو وزن ایک ناامتداد پذیر ڈوری کے ذریعہ لٹک
رہے ہیں جو ایک چکنی چرخی پر سے گذرتی ہے۔ اوزان ڈوری سے انتصاباً لٹکتے ہیں اور
اور ڈوری کو ایک نقطہ پر ثابت کر دیا گیا ہے تاکہ کوئی حرکت وقوع پذیر نہ ہو سکے۔ اگر
اچانک ڈوری کو چھوڑ دیا جائے تو چرخی پر کے دباؤ میں جو تبدیلی ہوگی اُس کو معلوم کرو۔

۳۔ ایک ڈوری ایک چکنے میز پر سے اس کے مقابل کے کناروں کے
علی القوائم گذرتی ہے اور اس کے سروں سے دو کمیتیں ف اور ق انتصاباً
لٹکتی ہیں۔ اگر ڈوری کے اُس حصہ پر جو میز پر ہے ایک کمیت ک لگا دی جائے
تو ثابت کرو کہ نظام کا اسراع حسب ذیل ہوگا:

$$\frac{\text{ف} - \text{ق}}{\text{ف} + \text{ق} + \text{ک}} \text{ ج}$$

۴۔ ایک ڈوری کے دو سروں سے دو کمیتیں ک، ک، باندھی گئی ہیں (۲۰۴)
اور ڈوری کو ایک کھونٹی پر سے گذارا گیا ہے جیسا کہ ایٹوڈ کی مشین میں کیا جاتا ہے
کھونٹی چکنی نہیں ہے اور اس میں اور ڈوری کے درمیان رگڑ کا زاویہ ﺻﻪ ہے۔ حرکت
معلوم کرو۔

۵۔ مثال ۳ میں فرض کرو کہ میز اور وزن ک کے درمیان رگڑ کی قدر
مہ ہے اور میز اور ڈوری کے درمیان مہَ ہے۔ حرکت معلوم کرو۔

۶۔ ایک رسی ایک چکنی چرخی پر سے لٹک رہی ہے۔ وہ یکساں اسراع
معلوم کرو جس کے ساتھ ایک شخص کو جس کا وزن ۱۰ اسٹون ہے رسی کے ایک سرے پر

چڑھنا پڑے گا تاکہ رسی جس کے دوسرے سرے سے ۱۲ اسٹون کا وزن بندھا ہے ساکن رہے۔

۷۔ ایٹوڈ کی مشین کی ڈوری کے ایک سرے سے ایک بندر بندھا ہوا ہے اور دوسرے سرے پر اتنا وزن بندھا ہوا ہے جو ٹھیک بندر کے وزن کے مساوی ہے اور چرخی سے ٹھیک اتنے ہی نیچے ہے۔ بندر دفعتاً اوپر چڑھنا شروع کرتا ہے۔ کون تیز تر چڑھیگا بندر یا وزن۔

۸۔ ۱۰ پونڈ اور ۲ پونڈ کے وزن جو انتصابی ڈوریوں سے لٹک رہے ہیں پہیئے اور محور پر متوازن ہیں۔ اگر ایک پونڈ کی کمیت کا اضافہ چھوٹے وزن میں کر دیا جائے، تو وہ اسراع معلوم کرو جس سے وہ نیچے اُترنے لگیگا، نیز ہر ڈوری کا تناؤ دریافت کرو۔ (پہیئے اور محور کا جمود نظر انداز کر دیا جائے)۔

۹۔ ۵ پونڈ کی ایک کمیت ایک چکنے مستوی پر جس کا میلان افق کے ساتھ ۳۰° ہے ٹکی ہوئی ہے اور اِس سے ایک مہین تاگا بندھا ہے جو مستوی کی چوٹی پر کی ایک چرخی پر سے گذرتا ہے جس کے دوسرے سرے سے ۳ پونڈ کی کمیت انتصاباً لٹک رہی ہے۔ تاگے کی کھینچ کا مقابلہ کرو جبکہ مستوی پر کی کمیت کو ثابت رکھا جائے اور جبکہ اُسے آزاد چھوڑ دیا جائے۔ اگر کمیت کو آزاد چھوڑتے کے ۸ ثانیے بعد تاگے کو دفعتاً جدا کر لیا جائے یا جلا دیا جائے تو معلوم کرو کہ کمیت مستوی کے اوپر پیچھے پلٹنے سے پیشتر کتنی دور تک اوپر چڑھے گی۔

۱۰۔ ایک ہلکا تاگا دو ثابت چرخیوں ا اور ب پر سے گذرتا ہے اور اِن کے درمیان اِس پر ایک تیسری چرخی ج کا قالب ہے جس کے نیچے سے وہ گذرتا ہے۔ کمیت ک، تاگے کے ہر ایک سرے سے باندھی گئی ہے اور کمیت ک، حرکت پذیر قالب سے بندھی ہے۔ چرخیوں کی کمیتیں قابل نظر انداز ہیں اور چرخیوں کو اسطرح ترتیب دیا گیا ہے کہ تاگے کے تمام حصے انتصابی ہیں۔ ثابت کرو کہ جب نظام کو چھوڑ دیا جائے تو تاگے کا تناؤ ک ک ا (ک + ۱/۲ ک) پونڈ ہے۔ نیز وہ اسراع معلوم کرو جس کے ساتھ کمیت ک گرتی ہے۔

۱۱۔ کمیت ک کا ایک لچکدار فیتہ جس کا طبعی طول ا اور مقیاس لہ ہے

محیط ب (۷ ا) کے ایک کھردرے افقی پہئے کے گرد لپٹا گیا ہے۔ کتنی تیزی سے پہیہ کو گھمانا چاہیئے کہ پٹہ پہیہ سے نکل جائے۔

۱۲۔ مثال ۱۱ کا لچکدار پٹہ محیط ب کے ایک چکنے کرہ پر جو زاوئی رفتار سہ کے ساتھ گھوم رہا ہے رکھا گیا ہے۔ سکون کا محل معلوم کرو۔

۱۳۔ اگر زمین تیز سے تیز تر اور اس سے تیز تر گھومنے لگے حتیٰ کہ بالآخر اجسام اس کے خط استواء سے اڑنے لگیں تو ثابت کرو کہ اس منزل کے پہنچنے تک کسی نقطہ پر خط شاقول زمین کے محور کے متوازی ہو جائے گا۔

۱۴۔ ایک جسم کو ایک پیچدار ترازو پر رکھا گیا ہے اور ترازو ایک جہاز میں ہے جو خط استواء پر رفتار و سے حرکت کر رہا ہے۔ ترازو صحیح طور پر وزن دکھلاتا ہے جبکہ جہاز ساکن ہو۔ ثابت کرو کہ جب جہاز حرکت میں ہوتا ہے تو ترازو کی قرات سے جسم کے وزن کا $\frac{۲ و سہ}{ج}$ گنا خطا (تقریباً) ظاہر ہوتی ہے جہاں سہ زمین کی زاوئی رفتار ہے۔

(۲۰۵)

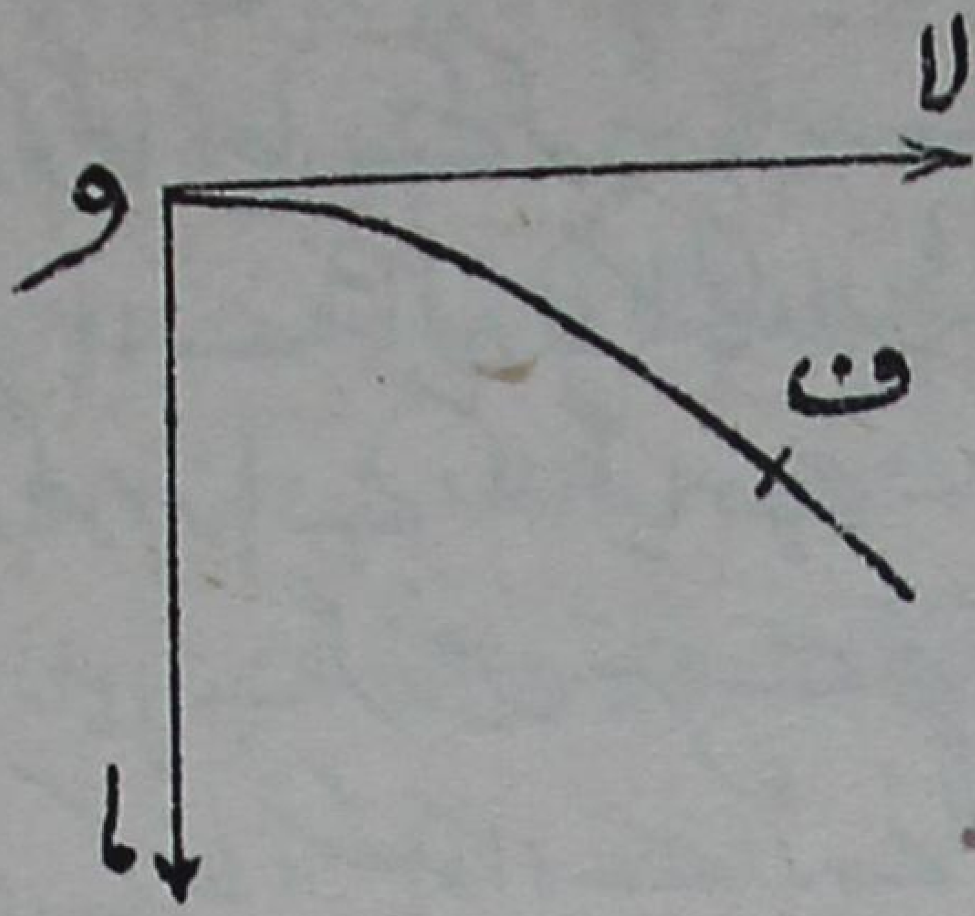
مرمیوں کی پرواز

۱۶۶۔ مرمی سے یہاں مراد وہ جسم ہے جو اس قدر چھوٹا ہو کہ اس کو ایک ذرہ تصور کیا جا سکے اور جو اس طریقہ سے پھینکا گیا ہو کہ وہ جاذبہ کے اثر کے تحت راستہ طے کرے۔

کوئی مرمی جاذبہ کے ساتھ ساتھ ہوا کی مزاحمت سے بھی بالعموم متاثر ہوگا لیکن ہم فرض کریں گے کہ ہوا کی مزاحمت ناقابل قدر ہے اور اس لیے جاذبہ ہی صرف وہ قوت ہے جس کا لحاظ رکھنے کی ضرورت ہے۔

فرض کرو کہ ہم اول سادہ ترین صورت لیتے ہیں چنانچہ خیال کرو کہ مرمی کو نقطہ و (شکل ۱۱۶) سے رفتار ع کے ساتھ افقاً پھینکا گیا ہے۔ عمل کرنے والی قوت صرف جاذبہ ہے جس کا افقی جزو ترکیبی کوئی نہیں ہے اور اس لیے افقی رفتار ع پوری حرکت کی اثناء میں علیٰ حالہ رہتی ہے۔ ابتدائی رفتار کا

انتصابی جزو ترکیبی صفر ہے لیکن نیچے وار اسراع بوجہ جاذبہ ج ہے۔ اس لیے وقت ت کے بعد افقی فاصلہ طے شدہ ع ت ہے اور وہ انتصابی فاصلہ جس میں سے جسم گر چکا ہے $\frac{1}{2}$ ج ت^2 ہے۔ افقی فاصلہ طے شدہ کو لا سے اور انتصابی فاصلہ کو ما سے تعبیر کرنے سے حاصل ہوتا ہے



شکل (۱۱۶)

$$\text{لا} = \text{ع ت} ،\ \text{ما} = \frac{1}{2}\ \text{ج ت}^2$$

راستہ طے شدہ کی مساوات، اِن مساواتوں سے ت کو ساقط کرنے سے حاصل ہوگی چنانچہ ایسا کرنے سے حاصل ہوتا ہے

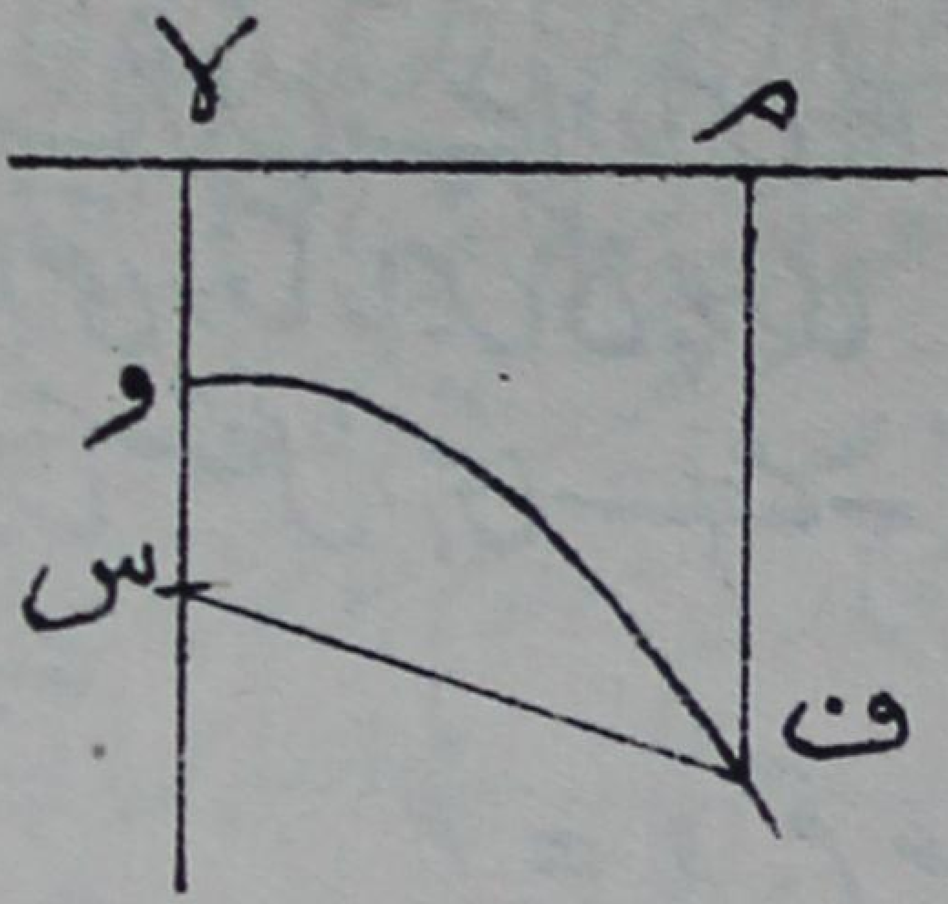
$$\text{ما} = \frac{\text{ج}}{2\,\text{ع}^2}\ \text{لا}^2$$

یہ مساوات ایک قطع مکافی کی ہے جس کا وتر خاص $\frac{2\,\text{ع}^2}{\text{ج}}$ ہے۔

صریحاً اِس منحنی کو متعین کرنے کا مسئلہ فی نفسہ وہی ہے جو دفعہ ۱۵۶ میں زیر بحث آچکا ہے۔ وہاں ایک جسم آزادانہ گر رہا تھا اور اپنا راستہ ایک کاغذ پر جو ایکساں افقی رفتار کے ساتھ اُس سے گذر رہا تھا مرتسم کرتا تھا۔ یہاں بھی ایک جسم آزادانہ گر رہا ہے اور ہم تصور کر سکتے ہیں کہ وہ اپنا راستہ ایک کاغذ پر مرتسم کرتا ہے جس سے وہ ایک ایکساں افقی رفتار سے گذرتا جاتا ہے۔ اِن دو صورتوں میں اضافی حرکت وہی ہے اور اِس لیے منحنی ضرور وہی ہونے چاہئیں۔

۱۶۷ — (۲۰۶) و پر رفتار ع ہے اور یہ رفتار وہی ہے جو اُس صورت میں ہوتی اگر جسم و کے انتصاباً اوپر ارتفاع $\frac{\text{ع}^2}{2\,\text{ج}}$ سے نیچے و تک گرتا۔ یہ ارتفاع

وتر خاص کا ایک چوتھائی ہے اور اس لیے مرتب لا م کے نیچے مکافی کے راس و کی گہرائی کے مساوی ہے۔ اس لیے و پر مرمی کی کُل توانائی اُس کُل توانائی کے مساوی ہے جو سکون کی حالت میں لا پر اِس کی ہوتی یا مرتب کے کسی اور نقطہ پر ہوتی کیونکہ مرتب افقی ہے۔



شکل (۱۱۷)

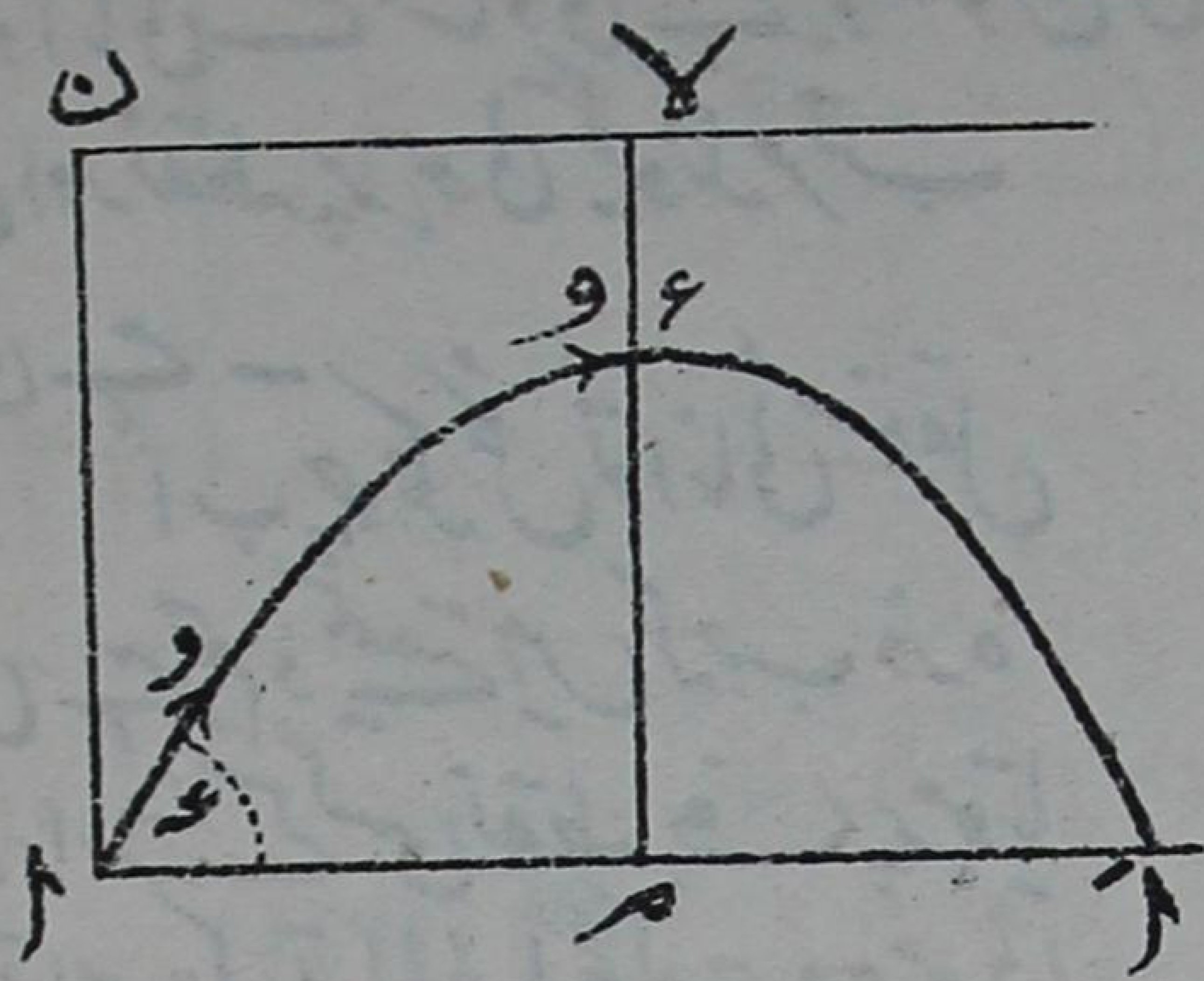
اب چونکہ کُل توانائی مستقل رہتی ہے ہم دیکھتے ہیں کہ جب ذرہ اپنے راستہ کے کسی نقطہ ف پر ہوتا ہے تو اس کی توانائی بالحرکت وہ ہوتی ہے جو فاصلہ ف م میں سے گرنے کی وجہ سے اس کو حاصل ہوتی ہے یعنے اُس فاصلہ میں سے جو مرتب سے نقطہ ف تک ہے۔ اس کو حسب ذیل طریقہ پر بیان کیا جا سکتا ہے:

کسی نقطہ پر مرمی کی رفتار وہ ہوتی ہے جو مرتب سے اُس نقطہ تک گرنے کی وجہ سے پیدا ہو سکتی ہے۔

۱۶۸ — یہ فرض کرنے کی بجائے کہ ذرہ کو مکافی کے راس و سے افقاً پھینکا گیا ہے ہم یہ فرض کر سکتے ہیں کہ وہ و پر ہوا میں سے پرواز کرتے ہوئے پہنچا ہے اور اس سے پیشتر اِس کو کسی نقطہ ا سے پھینکا گیا تھا۔ اُسی استدلال سے جس سے یہ معلوم ہوا تھا کہ و سے گذرنے کے بعد ذرہ کے راستہ کا حصہ مکافی ہے یہ معلوم ہو گا کہ و پر پہنچنے سے پیشتر بھی اس کا راستہ مکافی ہے۔ اس لیے کسی ذرہ کا راستہ جو کسی طریقہ سے پھینکا گیا ہو مکافی ہوتا ہے۔

فرض کرو کہ ایک ذرہ کو نقطہ ا سے ایک ایسی سمت میں رفتار و سے پھینکا گیا ہے جو افق کے ساتھ زاویہ عہ بناتی ہے۔ فرض کرو کہ اسکے

راستہ کا راس و ہے اور فرض کرو کہ جب مرمی نقطہ و میں سے گذرتا ہے تو اس کی رفتار ۶ ہے، یہ رفتار بے شبہ افقی ہے — ذرہ پر عمل کرنے والی کوئی افقی قوت نہیں ہے اور اس لیے اس کی افقی رفتار اس کی پوری پرواز میں مستقل رہتی ہے۔ اس لیے (۲۰۷)



شکل (۱۱۸)

$$۶ = و \text{ جم } ع$$

اس لیے مکانی کا وتر خاص

$$\frac{۲\,۶^۲}{ج} = \frac{۲\,و^۲ \text{ جم}^۲ ع}{ج}$$

رفتار و وہ ہے جو مرتب سے ا تک گرنے کی وجہ سے پیدا ہوتی ہے اس لیے اگر ن لا مرتب ہو تو

$$ا ن = \frac{و^۲}{۲ ج}$$

ا سے و تک پرواز کا وقت وہ وقت ہے جو جاذبہ انتصابی رفتار و جب ع کو معدوم کرنے میں لیتی ہے، اس لیے وہ $\frac{و \text{ جب } ع}{ج}$ ہے۔ اس وقت میں افقی فاصلہ ا م یکساں رفتار ۶ سے طے ہوا ہے، اس لیے

$$ا م = ۶ \, \frac{و \text{ جب } ع}{ج} = \frac{و^۲ \text{ جب } ع \text{ جم } ع}{ج}$$

طے شدہ انتصابی فاصلہ و م بموجب مساوات (۴۷) نصف وقت مضروب ابتدائی انتصابی رفتار کے مساوی ہے، اس لیے

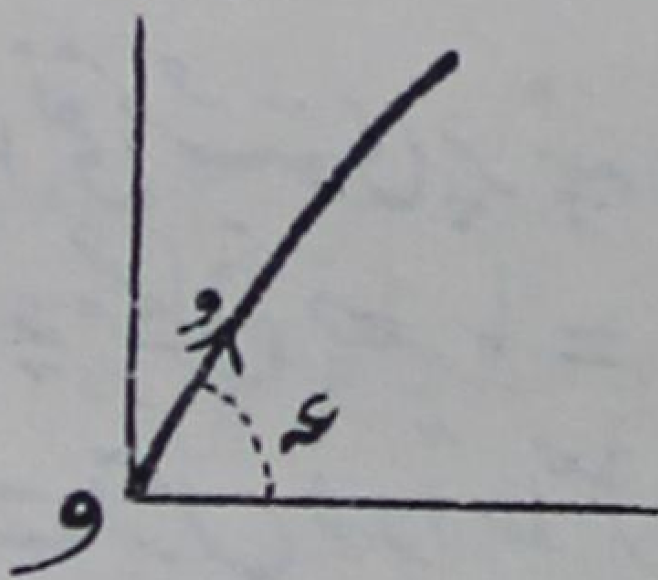
$$و م = \frac{1}{2} \frac{و^2 جب^2 عہ}{ج}$$

افقی مستوی پر پورا ٹپہ اا' ، ام کا دگنا ہے اور اس لیے

$$اا' = \frac{2 و^2 جب عہ جم عہ}{ج} = \frac{و^2 جب 2 عہ}{ج}$$

۱۶۹ — اگر و کی قیمت مستقل ہو (مثلاً اگر ہم گولی کو بارود کی ایک مقررہ بھرن سے فائر کرتے رہیں) اور زاویہ عہ متغیر ہو تو ٹپہ اا'، $\frac{و^2}{ج}$ سے تجاوز نہیں کر سکتا کیونکہ جزو ضربی جب ۲ عہ کی قیمت اکائی سے زیادہ نہیں ہو سکتی۔ اس لیے اگر پھینکنے کی رفتار و معلوم ہو تو بڑے سے بڑا ٹپہ جو افقی مستوی پر حاصل ہو سکتا ہے $\frac{و^2}{ج}$ ہے اور اس ٹپہ کو حاصل کرنے کے لیے جب ۲ عہ = ۱ ہونا چاہیئے یعنے عہ = ۴۵°۔ پس کسی مرمی کو افقی مستوی پر حتی الامکان دور پھینکنے کے لیے اس کو زاویہ ۴۵° پر پھینکنا چاہیئے۔ (۲۰۸)

۱۷۰ — ان نتائج کو تحلیلی طور پر بھی حاصل کیا جا سکتا ہے۔ فرض کرو کہ ہم نقطۂ رمیدگی کو مبدا لیتے ہیں اور اس مستوی کو جس میں پرواز واقع ہوتی ہے مستوی لا ما فرض کرتے ہیں جہاں محاور لا اور ما علی الترتیب افقی اور انتصابی ہیں۔



شکل (۱۱۹)

اس نقطہ کا لا محدد جس پر ذرہ وقت ت کے بعد پہنچتا ہے اس افقی فاصلے کے مساوی ہے جو وقت ت میں یکساں رفتار و جم عہ سے طے ہوتا ہے۔ اس لیے

$$لا = و جم عہ \times ت \quad \ldots\ldots\ldots (۵۶)$$

اسی طرح اس نقطہ کا ما محدد وہ فاصلہ ہے جو وقت ت میں ابتدائی رفتار و جب عہ اور ابطاء ج کے ساتھ طے ہوا ہے۔ اس لیے یہ فاصلہ

$$\text{ما} = \text{و جب عہ} \times \text{ت} - \tfrac{1}{2}\,\text{ج ت}^2 \quad \ldots\ldots (۵۷)$$

ہے۔ اگر ہم مساواتوں (۵۶) اور (۵۷) سے ت کو ساقط کریں تو راستہ کی مساوات حاصل ہوگی چنانچہ

$$\text{ما} = \text{لا مس عہ} - \frac{\text{ج لا}^2}{۲\ \text{و}^2\ \text{جم}^2\ \text{عہ}} \quad \ldots\ldots (۵۸)$$

اِس کو شکل

$$\text{ما} - \frac{1}{2}\,\frac{\text{و}^2\ \text{جب}^2\ \text{عہ}}{\text{ج}} = -\frac{\text{ج}}{۲\ \text{و}^2\ \text{جم}^2\ \text{عہ}}\left(\text{لا} - \frac{\text{و}^2\ \text{جب عہ جم عہ}}{\text{ج}}\right)^2$$

میں رکھا جا سکتا ہے جو صریحاً ایک قطع مکافی کی مساوات ہے جس کا راس نقطہ

$$\text{لا} = \frac{\text{و}^2\ \text{جب عہ جم عہ}}{\text{ج}}\ ،\quad \text{ما} = \frac{1}{2}\,\frac{\text{و}^2\ \text{جب}^2\ \text{عہ}}{\text{ج}} \quad \ldots\ldots (۵۹)$$

پر ہے اور جس کے وتر خاص کا طول

$$\frac{۲\ \text{و}^2\ \text{جم}^2\ \text{عہ}}{\text{ج}}$$

ہے۔

افقی مستوی پر ٹپہ حاصل کرنے کے لئے وہ نقطہ معلوم کرنا چاہئے جس میں یہ مکافی خط ما = ۰ کو قطع کرتا ہے۔ مساوات (۵۸) میں ما = ۰ رکھنے سے ہمیں فوراً حاصل ہوتا ہے

$$\text{لا} = \frac{۲\ \text{و}^2\ \text{جم}^2\ \text{عہ}}{\text{ج}}\ \text{مس عہ} = \frac{\text{و}^2\ \text{جب}\ ۲\ \text{عہ}}{\text{ج}}$$

جو دفعہ ۱۶۸ میں حاصل شدہ قیمت کے مطابق ہے۔

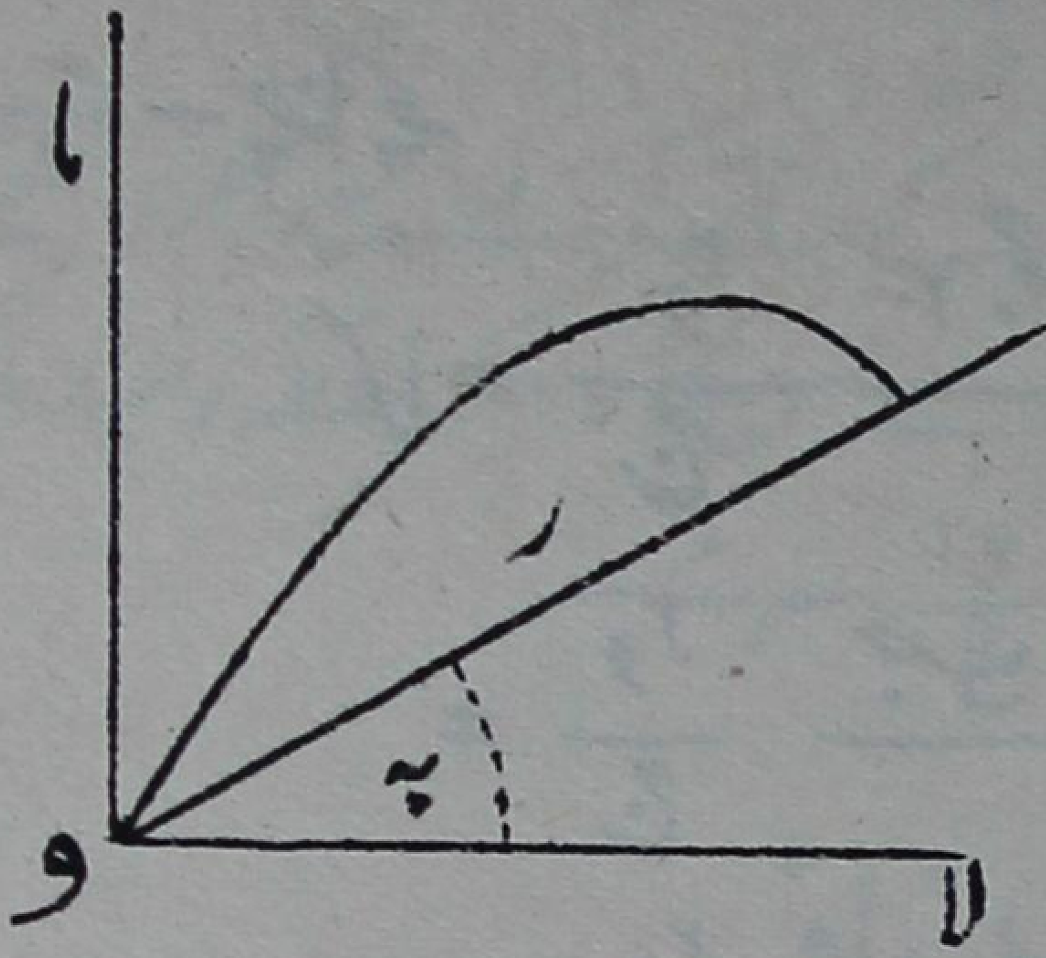
ٹپہ مائل مستوی پر

۱۷۱ — فرض کرو کہ مرمی کو نقطہ رہیدگی و میں سے گذرنے والے

ایک مائل مستوی پر پھینکا گیا ہے۔
فرض کرو کہ اِس مستوی کا میلان اُفق کے ساتھ به ہے اور فرض کرو کہ اِس مستوی پر مرمی کا ٹپہ ر ہے۔
پس اُس نقطہ کے محدد جس پر مرمی مستوی سے ٹکراتا ہے

لا = ر جم به، ما = ر جب به

ہونے چاہئیں۔



شکل (۱۲۰)

یہ نقطہ قطع مکافی پر ہونا چاہئے اور اِس لیے اِس کے محددوں کو مساوات (۵۸) پوری کرنی چاہئے۔ اِن محددوں کو درج کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{ر جب به} = \text{ر س عه جم به} - \frac{\text{ج ر}^{2}\ \text{جم}^{2}\ \text{به}}{2\ \text{و}^{2}\ \text{جم}^{2}\ \text{عه}}$$

جس سے ٹپہ ر کی قیمت حسب ذیل حاصل ہوتی ہے:

$$\text{ر} = \frac{2\ \text{و}^{2}}{\text{ج}}\ \frac{\text{جم عه جب (عه} - \text{به)}}{\text{جم}^{2}\ \text{به}} \quad \ldots\ldots (60)$$

چونکہ $2\ \text{جم عه جب (عه} - \text{به)} = \text{جب (}2\text{عه} - \text{به)} - \text{جب به} \quad \ldots (61)$

اِس لئے ظاہر ہے کہ اگر صرف عه کو بدلنے دیا جائے تو ٹپہ ر اعظم ہوگا جبکہ جب (۲عه − به) اعظم ہو یعنی جبکہ وہ اکائی کے مساوی ہو۔ اِس قیمت کو حاصل کرنے کے لئے ہم رکھتے ہیں

$$\text{عه} = \frac{\pi}{4} + \frac{\text{به}}{2}$$

(۲۱۰) اِس لیے اعظم ٹپہ حاصل کرنے کے لئے ہم مرمی کو اُس سمت میں پھینکتے ہیں جو مائل مستوی اور انتصابی کے درمیانی زاویہ کی تنصیف کرتی ہے۔
جب رمیدگی اِس سمت میں واقع ہوتی ہے تو اعظم ٹپہ کی مساوات

(۶۰) سے حاصل شدہ ر کی قیمت میں جیب (۲ عہ - بہ) = ۱ رکھنے سے حاصل ہوتا ہے۔ چنانچہ

$$ر = \frac{و^2}{ج} \cdot \frac{۲\ جم\ عہ\ جیب\ (عہ - بہ)}{جم^2\ بہ}$$

$$= \frac{و^2}{ج} \cdot \frac{جب\ (۲\ عہ - بہ) - جیب\ بہ}{جم^2\ بہ}$$

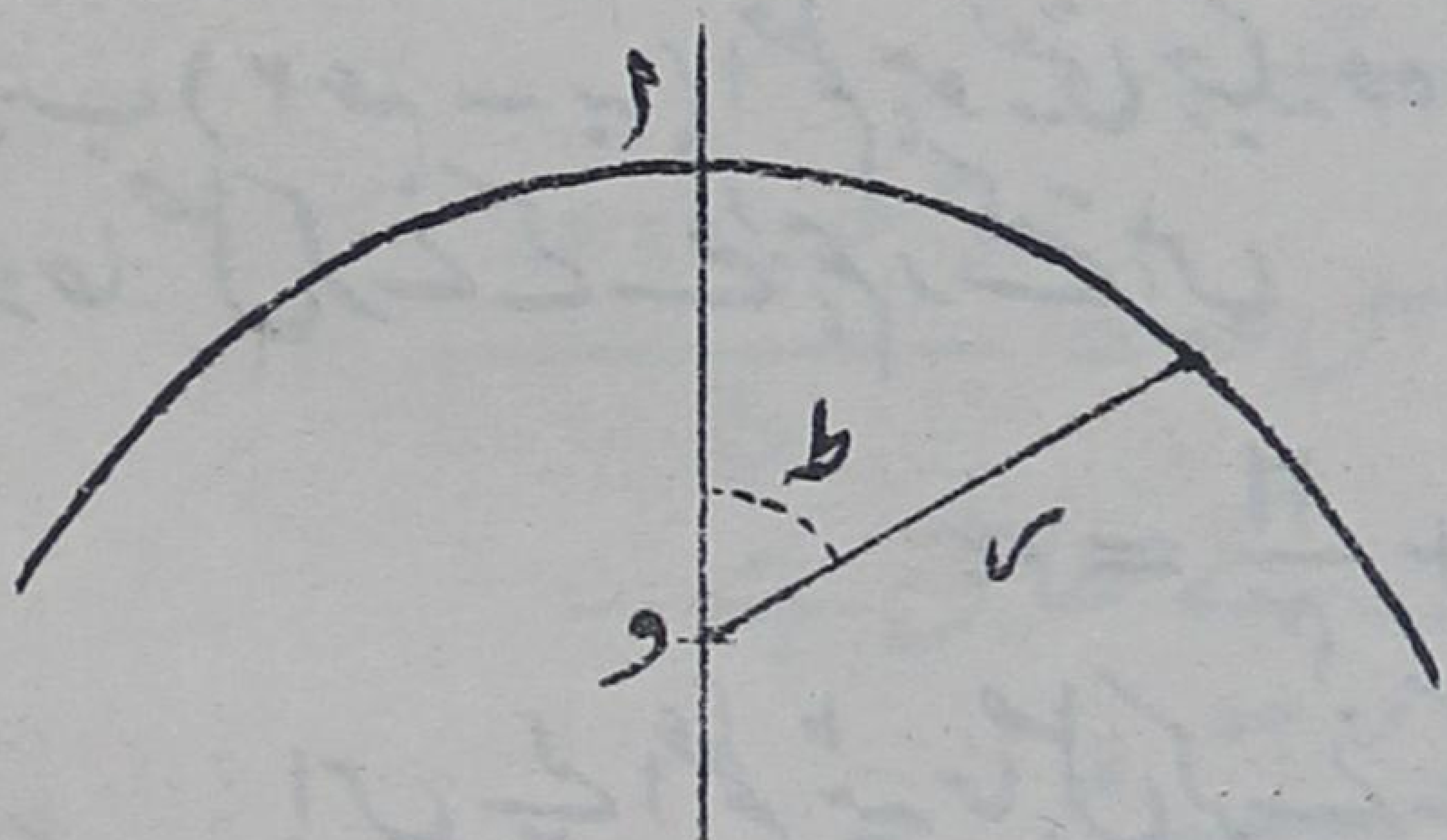
$$= \frac{و^2}{ج} \cdot \frac{۱ - جیب\ بہ}{جم^2\ بہ}$$

$$= \frac{و^2}{ج\ (۱ + جیب\ بہ)} \qquad (۶۲)$$

۱۷۲ — اِس مساوات سے وہ بڑے سے بڑا فاصلہ معلوم ہو سکتا ہے جو مرمی کسی سمت میں طے کر سکتا ہے جبکہ اس کو رفتار و سے پھینکا گیا ہو۔ فرض کرو کہ ہم بہ کی بجائے $\frac{\pi}{2}$ - طہ رکھتے ہیں اور اِس لیے طہ وہ زاویہ ہے جو مرمی کی سمت انتصابی کے ساتھ بناتی ہے۔ اب ر اور طہ میں ربط ہے

$$ر = \frac{و^2}{ج\ (۱ + جم\ طہ)} \qquad (۶۳)$$

اِس کو قطبی محددوں ر، ط میں مساوات سمجھنے سے صریحاً یہ ایک ایسے منحنی کی مساوات ہے کہ اِس کے اندر کسی نقطہ پر ہم ایک مرمی کے ذریعہ جو رفتار و سے فائر کیا گیا ہو ضرب لگا سکتے ہیں لیکن اِس کے باہر کسی نقطہ تک مرمی کو نہیں پہنچا سکتے۔ ہم جانتے ہیں کہ وتر خاص ل کے قطع مکافی کی قطبی مساوات اس کے ماسکہ اور محور کے حوالے سے حسب ذیل ہے:



شکل (۱۲۱)

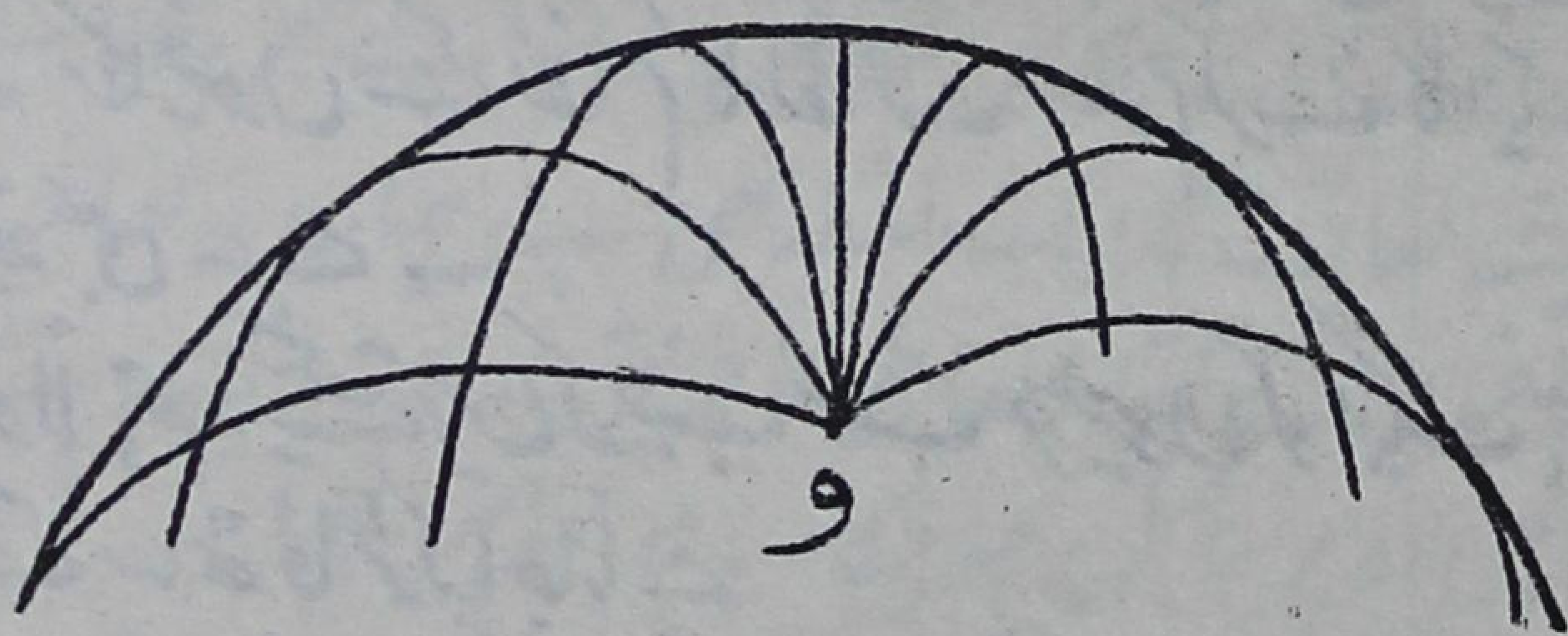
$$\text{ک} = \frac{\frac{1}{2}\ \text{ل}}{1 + \text{جم طہ}}$$

اس کا مقابلہ مساوات (۶۳) کے ساتھ کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ یہ مساوات ایک قطع مکافی کو تعبیر کرتی ہے جس کا ماسکہ نقطہ رمید گی ہے اور محور انتصابی ہے اور نیم وتر خاص $\frac{\text{و}^2}{\text{ج}}$ ہے۔

راستوں کا لفاف

(۲۱۱)

۱۷۳۔ اگر ہم ان تمام مکافیوں کا تصور کریں جن کو مرمی جو نقطہ و سے رفتار د کے ساتھ فائر کیے گئے ہوں مرتسم کرتے ہیں تو ہمیں شکل (۱۲۲) کے مشابہ ایک شکل حاصل ہوگی۔ بیرونی جلی منحنی صریحاً ان نقطوں کو جن پر مرمی پہنچ سکتے ہیں ان نقطوں سے جن پر مرمی نہیں پہنچ سکتے جدا کرتا ہے۔ اس لیے یہ وہ مکافی ہے جس کی مساوات (۶۳) سے حاصل ہوتی ہے۔ شکل (۱۲۲) کے مطالعہ سے یہ معلوم ہو گا کہ یہ منحنی مکافیوں



شکل (۱۲۲)

کے اس نظام کا لفاف ہے جو فائر کرنے کی مختلف سمتوں کے متناظر ہیں۔

۱۷۴۔ مکافیوں کے نظام کا لفاف تحلیلی طریقوں کے ذریعہ نسبتاً زیادہ راست طریقہ پر معلوم کیا جا سکتا ہے۔ اگر ہم مساوات (۵۸) میں مس عہ کی بجائے م لکھیں تو نظام کے ایک مکافی کی مساوات شکل

$$ما = م لا - \frac{ج لا^۲}{۲ و^۲} (۱ + م^۲)$$

میں حاصل ہوتی ہے اور پورا نظام، م کو مختلف قیمتیں دینے سے حاصل ہوتا ہے۔
وہ شرط کہ اس مساوات کی اصلیں م میں مساوی ہوں یہ ہے کہ

$$لا^۲ = \frac{۲ ج لا^۲}{۲ و^۲} \left(\frac{ج لا^۲}{۲ و^۲} + ما \right)$$

جس کو شکل

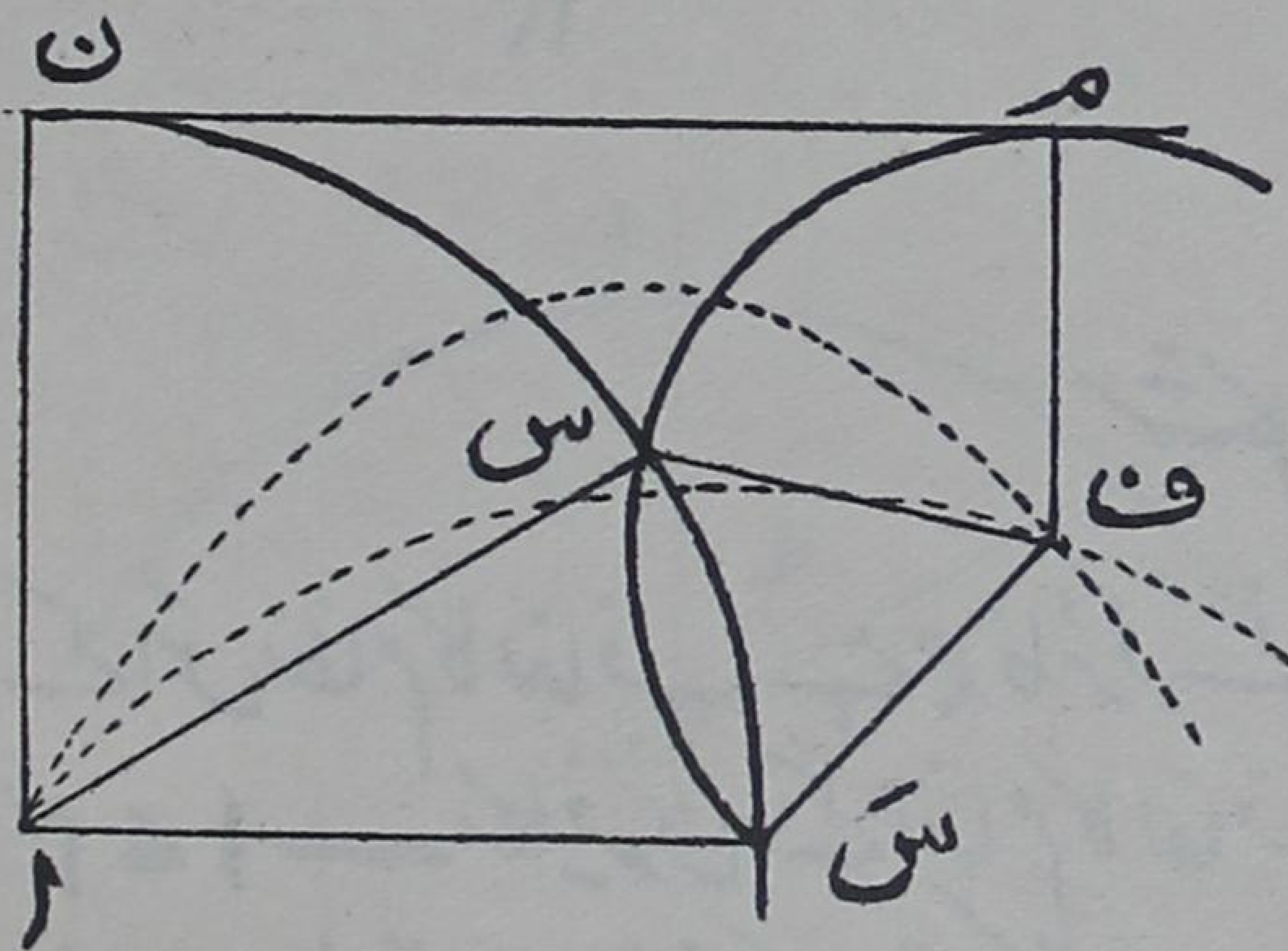
$$لا^۲ = - \frac{۲ و^۲}{ج} \left(ما - \frac{و^۲}{۲ ج} \right) \quad .... (۶۴)$$

میں تحویل کیا جا سکتا ہے۔

اگر لا، ما اس مساوات کو پورا کریں تو دو مکافی جن میں لا انتہا کم فرق ہے نقطہ لا، ما میں سے گذرتے ہیں اور اس لیے لفاف پر کا ایک نقطہ لا، ما ہے۔ اس طرح مساوات (۶۴) لفاف کی مساوات ہے اور اس سے وہی مکافی لفاف حاصل ہوتا ہے جو قبل ازیں حاصل کیا جا چکا ہے۔ (۲۱۲)

۱۷۵۔ مکافیوں کے نظام کا لفاف معلوم کرنے کا ایک بہت سادہ ہندسی طریقہ بھی ہے۔

اولاً ہم دیکھتے ہیں کہ جب سب مرمیوں کو ایک ہی نقطہ و سے رفتار و کے ساتھ فائر کیا جاتا ہے تو ان کے راستوں کا ایک ہی مرتب ن مہ (شکل ۱۲۳) ہونا چاہئے۔



شکل (۱۲۳)

فرض کرو کہ نظام کے کوئی دو مکافی، ف پر متقاطع ہوتے ہیں اور فرض کرو کہ ان کے ماسکے س، سَ ہیں۔ فرض کرو کہ ا، ف سے مرتب پر عمود علی الترتیب

ان، ف م ہیں۔

اب اس = اسَ کیونکہ اِن میں سے ہر ایک ا ن کے مساوی ہے، نیز ف س = ف سَ کیونکہ ہر ایک ف م کے مساوی ہے۔ اس لئے س اور سَ، اُن دو دائروں کے نقاط تقاطع ہیں جن کے مرکز ا، ف ہیں۔

اگر اِن دو مکافیوں کو متصلہ فرض کیا جائے تو اِن کے ماسکے س، سَ متصلہ نقطے ہوں گے اور اس لئے مذکورہ بالا دو دائرے مس کرینگے اور ا س ف انتہا میں ایک خط مستقیم ہوگا۔ پس اس صورت میں

ا ف = ا س + س ف

= ا ن + ف م

= نقطہ ف سے ایک ایسے ثابت افقی خط پر عمود جو م ن کے اوپر فاصلہ ا ن پر ہے۔

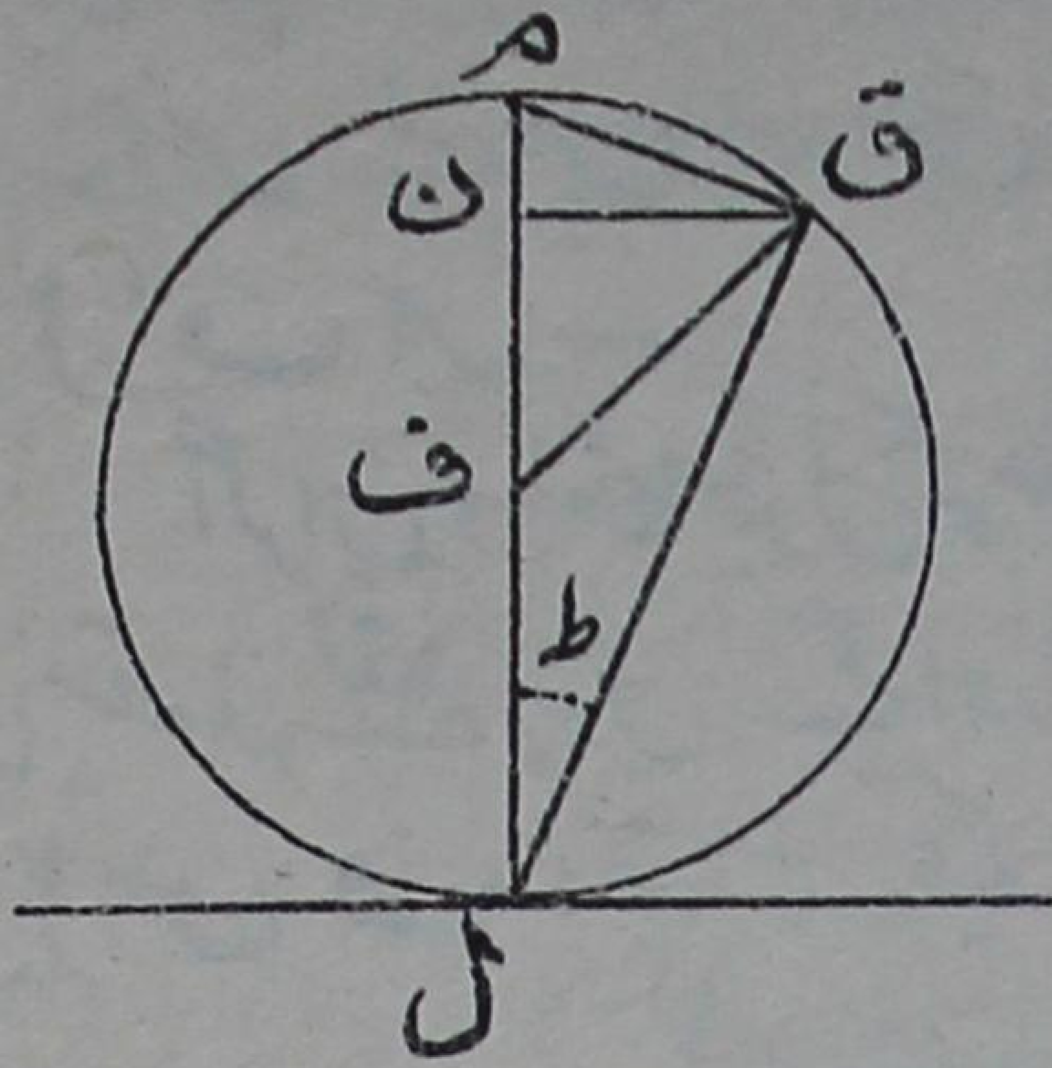
پس نقطہ ف یہ شرط پوری کرتا ہے کہ اس کا فاصلہ اِس ثابت خط سے اُس فاصلہ کے مساوی ہے جو اِس کے اور ثابت نقطہ کے درمیان ہے۔ اس لیے ف ہمیشہ ایک خاص مکافی پر رہتا ہے جس کا ماسکہ ا ہے۔ لیکن ف ہمیشہ لفاف کا ایک نقطہ بھی ہے جہاں یہ لفاف نظام کے دو دو متصلہ مکافیوں کے نقاط تقاطع کا طریق ہے۔ اِس لیے لفاف وہ مکافی ہے جو ابھی اوپر حاصل ہو چکا ہے اور جس کا ماسکہ ا ہے۔ یہ مکافی وہی مکافی ہے جو قبل ازیں حاصل ہو چکا ہے۔

توضیحی مثالیں

(۲۱۳)

ا۔ ایک گاڑی ہموار سڑک پر رفتار و سے دوڑتی ہے اور اسکے پہیوں کے پٹوں سے کیچڑ کے ذرات خارج ہوتے ہیں۔ وہ بڑے سے بڑا ارتفاع معلوم کرو جس تک اِن میں سے کوئی ذرہ اُچھلیگا۔

فرض کرو کہ پہیہ کا نصف قطر ا ہے تو ہم دیکھ چکے ہیں (صفحہ ۱۳) کہ کوئی نقطہ ق رفتار و × ق ل/ا سے سمت ق م میں جو ق ل پر عمود ہے حرکت کرتا ہے۔ ق سے نکلے ہوئے کیچڑ کی رفتار یہی ہوگی۔ اگر زاویہ ق ل ف، ط ہو تو زمین کے اوپر جس ارتقاع سے کیچڑ نکلتا ہے وہ



شکل (۱۲۴)

ل ن = ل ف + ف ن = ا(ا + جم۲ ط)

ہے اور اس کی رفتار کا انتصابی جزو ترکیبی

و(ق ل/ا) جب ط = ۲ و جب ط جم ط = و جب ۲ ط

ہے۔ کیچڑ جو اس انتصابی رفتار سے نکلتا ہے مزید انتصابی ارتقاع

(و جب ۲ ط)² / ۲ ج

حاصل کرتا ہے اور اس لیے کل ارتقاع جہاں تک کیچڑ پہنچتا ہے

ا + ا جم ۲ ط + (و² / ۲ ج) جب² ۲ ط

ہے۔ اس کو جم ۲ ط کے ایک دو درجی تفاعل کے طور پر شکل ذیل میں لکھا جا سکتا ہے:

(ا + و² / ۲ ج) − (و² / ۲ ج) جم² ۲ ط + ا جم ۲ ط

= (ا + و² / ۲ ج) + ا² ج / ۲ و² − (و² / ۲ ج) [جم ۲ ط − ا ج / و²]²

اس جملہ کی اعظم قیمت جبکہ ط بدلے اس وقت واقع ہوتی ہے

جب ۲ ط = ا ج / و² بشرطیکہ جم ۲ ط کے لیے یہ قیمت اختیار کرنا ممکن ہو

یعنی بشرطیکہ $و^2 >$ ا ج ۔ اِس صورت میں اعظم ارتفاع زمین کے اوپر

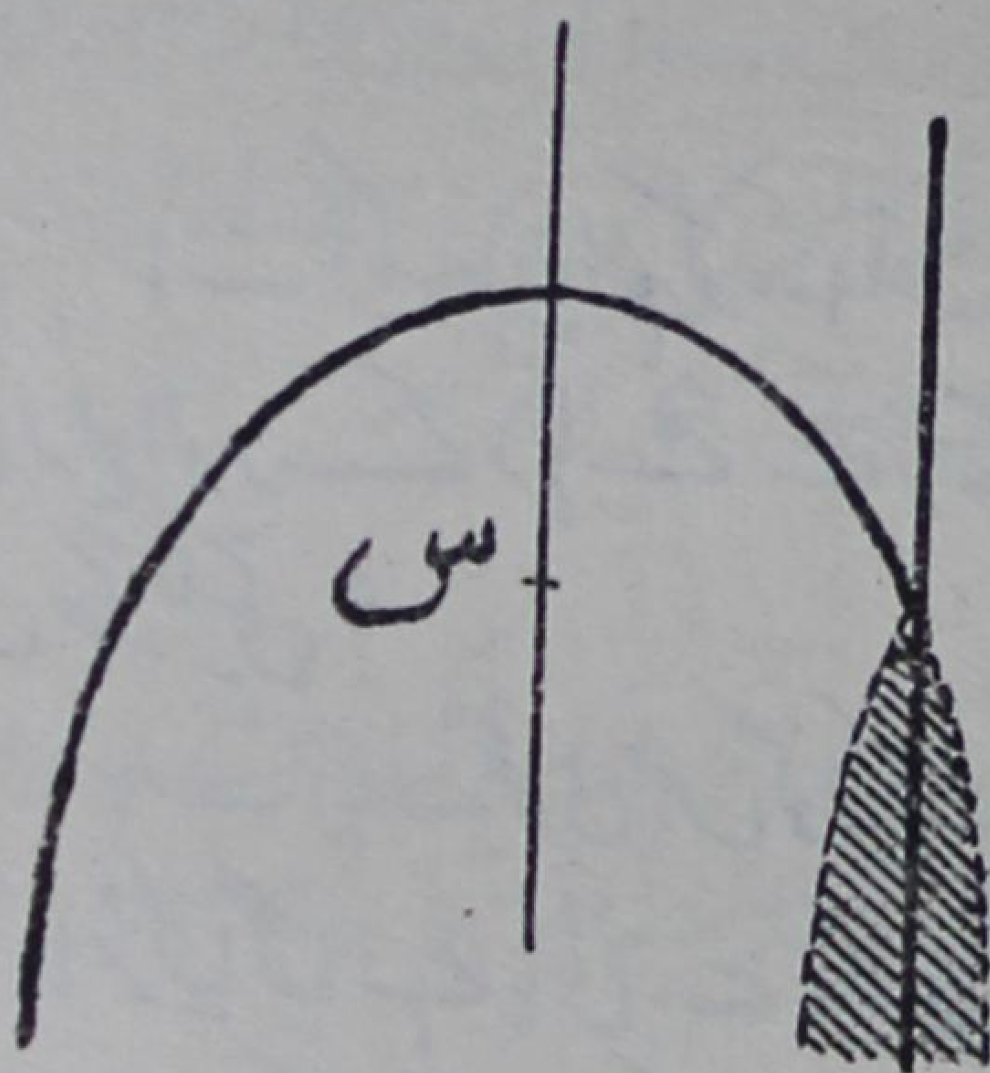
$$ا + \frac{و^2}{۲ ج} + \frac{ا^2 ج}{۲ و^2} = \frac{(ا ج + و^2)^2}{۲ ج و^2}$$

ہے۔

لیکن اگر $و^2 <$ ا ج تو ہم $\left[جم ۲ ط - \frac{ا ج}{و^2} \right]^2$ کو معدوم نہیں کر سکتے

اِس لیے ہم اِس کو حتی الامکان چھوٹا بناتے ہیں اور اِس لئے جم ۲ ط = ۱ لیتے ہیں۔
اِس طرح کھینچا جو بلند ترین نقطہ تک پہنچتا ہے وہ ہے جو پہیہ کے سب سے اوپر کے
نقطہ م سے نکلتا ہے اور صریحاً وہ اپنے ابتدائی نقطہ سے بلند تر ہرگز نہیں اُچھلتا۔

۲۔ ایک اگن ہوز[ا] رفتار و سے پانی پھینکتا ہے اور اِس سے
ف فاصلہ پر ایک انتصابی دیوار ہے ۔ معلوم کرو کہ دیوار کا کتنا رقبہ
تر ہو گا۔



شکل (۱۲۵)

فرض کرو کہ اگن ہوز کا دہانہ س ہے
اور فرض کرو کہ وہ پانی کے ذرات
کسی سمت میں رفتار و سے پھینک
سکتا ہے ۔ وہ نقطے جن تک پانی
پہنچ سکتا ہے حسب دفعہ ۱۷۲ وہ تمام
نقطے ہوں گے جو ایک گردشی مکافی نما
کے اندر واقع ہوں گے جس کا محور
انتصابی، ماسکہ س اور وتر خاص $\frac{۲ و^2}{ج}$ ہے ۔ اگر ہم س کو مبدا لیں اور
س میں گذرنے والے انتصابی خط کو محوری فرض کریں تو اِس مکافی نما کی مساوات ہوگی

$$(لا^2 + ما^2) = \frac{۲ و^2}{ج} \left(\frac{و^2}{۲ ج} - ی \right)$$

دیوار کی مساوات ما = ف لیجا سکتی ہے اور وہ منحنی جس میں یہ مکافی نما دیوار کو

[ا] Fire-hose

قطع کرتا ہے

$$لا^2 + ف^2 = \frac{۲ و^2}{ج}\left(\frac{و^2}{۲ ج} - ی\right)$$

یا

$$لا^2 = \frac{۲ و^2}{ج}\left(\frac{و^2}{۲ ج} - \frac{ف^2 ج}{۲ و^2} - ی\right)$$

ہے۔ یہ مساوات ایک قطع مکافی کی مساوات ہے جس کا وتر خاص $\frac{۲ و^2}{ج}$ ہے، محور انتصابی ہے اور راس، اس کے اوپر ارتفاع

$$\frac{و^2}{۲ ج} - \frac{ف^2 ج}{۲ و^2}$$

پر ہے۔ اس قطع مکافی کے اندر کے سب نقطے پانی کی دہار کے حدود کے اندر واقع ہوں گے اور وہ نقطے جو اس مکافی کے باہر ہوں گے ناقابل رسائی ہوں گے۔

مثالیں

۱۔ ایک ریوالور کو ۱۰۰ فٹ بلند مینار کے سرے سے اُفقاً فائر کیا گیا ہے اور گولی ریوالور کے دہانے سے رفتار ۶۰۰ فٹ فی ثانیہ سے نکلتی ہے۔ گولی زمین پر کس جگہ لگیگی؟

۲۔ ایک گولی جس کو ایک تالاب کی سطح کے اوپر ۱۰ فٹ ارتفاع سے اُفقاً فائر کیا گیا ہے پانی سے ۵۰۰ گز کے فاصلہ پر ٹکراتی ہے۔ اس کی رفتار فٹوں میں فی ثانیہ معلوم کرو اگر ہوا کی مزاحمت ناقابل قدر ہو۔

۳۔ ثابت کرو کہ کسی بندوق کے متعلق یہ دعوے کرنا کہ اس کی گولی ۱۰۰ گز کے ٹپہ میں ایک انچ سے زیادہ نہیں چڑھتی اس بات کو مستلزم ہے کہ رفتار ۲۰۷۸ فٹ فی ثانیہ سے بڑی ہونی چاہئے۔

۴۔ کرکٹ کا گولہ ایک افقی مستوی پر ۱۰۰ فٹ فی ثانیہ کی رفتار سے پھینکا گیا ہے۔ بڑے سے بڑا ٹپہ معلوم کرو۔

۵۔ ایک بندوق ہے جس کا دہانہ زمین سے قریب ہے۔ اس بندوق سے

ایک گولی فائر کی گئی ہے جو ۶ فٹ لمبے آدمی کے اوپر سے جو ۱۰ گز دور کھڑا ہے عین گذر جاتی ہے اور خود زمین میں ایک چوتھائی میل دور دفن ہو جاتی ہے۔ ثابت کرو کہ گولی زمین کے اوپر جس بلندی تک اُڑتی ہے وہ یقیناً ۲۲ گز سے بڑی ہے۔

۶۔ ایک مرمی کا اعظم افقی ٹپہ ۲۵۶ فٹ ہے۔ اس کو پھینکنے کی رفتار کیا ہے اگر اس کو اس رفتار سے ۲۴ فٹ بلند غلام گردش کے فرش پر کے ایک نقطہ سے پھینکا جائے تو اس کا بڑے سے بڑا ٹپہ کیا ہوگا اگر وہ چھت سے نہ ٹکرائے اور غلام گردش کافی طویل ہو۔

۷۔ ثابت کرو کہ ۲۰ میل ٹپہ کے لیے مطلوبہ رفتار کم از کم ۸۴۰ء۱ فٹ فی ثانیہ ہوگی اور مرمی کے پرواز کا وقت ۸۱٫۳ ثانیے ہوگا۔

۸۔ مثال ماسبق میں ۲۰ میل ٹپہ کے لیے بارود کی بھرن معلوم کرو یہ فرض کر کے کہ گولے کا وزن ایک ٹن ہے اور بارود کی طاقت ۱۰۰ فٹ ٹن (فی پونڈ بارود) کی قوت پیدا کر سکتی ہے۔

۹۔ ثابت کرو کہ اگر ایک مرمی کو رفتار و سے ایک ہموار مستوی کے اوپر ارتفاع ف سے زاویہ عہ پر پھینکا جائے تو اس کا ٹپہ ر، مساوات

$$۲\,و^2\,(ف + ر\,مس\,عہ) = ج\,ر^2\,قط^2\,عہ$$

سے حاصل ہوگا۔

۱۰۔ ثابت کرو کہ ایک ہموار مستوی کا وہ رقبہ جو اُس توپ کی زد میں ہو جو مستوی کے اوپر ارتفاع ف پر ہے ف کے ساتھ متناسباً بڑھتا ہے اور

$$ا + ۲\,ف\,\sqrt{\pi\,ا}$$

کے مساوی ہے جہاں ا وہ رقبہ ہے جو زد میں ہوتا ہے جبکہ توپ مستوی کی ہمواری پر ہوتی ہے۔

۱۱۔ ایک مرمی کو ایک قلعہ سے جو افقی مستوی کے اوپر ۳۰۰ فٹ بلند ہے ۲۰۰ء۷ فٹ فی ثانیہ کی رفتار سے فائر کیا جا سکتا ہے۔ معلوم کرو کہ مستوی کا کتنا رقبہ زد میں رہتا ہے۔

۱۲۔ ضلع ا کے ایک منتظم مسدس کو انتصاباً اس طرح رکھا گیا ہے کہ اس کا

ایک کنارہ ایک افقی میز پر ٹکا ہوا ہے ۔۔ ایک ذرہ کو اِس طریقہ سے پھینکا گیا کہ وہ اِس مسدس کے چار اوپر کے کونوں کو عین چاٹتے ہوئے گذر جاتا ہے ۔ ذرہ کی پرواز میں بلند ترین نقطہ معلوم کرو اور ثابت کرو کہ میز پر ٹپہ $۱/\sqrt{۷}$ ہے ۔

۱۳ ۔۔ ایک مشین گن کو ایک مسلح ٹرین پر نصب کیا گیا ہے ۔ ٹرین افقی پٹڑیوں پر رفتار و سے دوڑتی ہے اور توپ کے دہانے سے گولے رفتار و سے نکلتے ہیں ۔ بڑے سے بڑا ٹپہ معلوم کرو

(ا) ٹرین کے سامنے

(ب) ٹرین کے پیچھے

عام مثالیں

۱ ۔۔ ایک ٹرین ۶۰ میل فی گھنٹہ کی رفتار سے جا رہی ہے اور وہ ایک منحنی پر پہنچتی ہے جس کا نصف قطر تین چوتھائی میل ہے ۔ ٹرین میں دیوار پر ایک کامل چکنا افقی تختہ لگا ہے جس کا کنارہ پٹڑیوں کے متوازی ہے اور اُس جانب ہے جو منحنی کے مرکز سے دُور ہے ۔ تختہ پر ایک چھوٹی چیز اس کے کنارے سے ۸ انچ فاصلے پر استادہ ہے ۔ ثابت کرو کہ یہ چیز تختہ سے گر جائے گی جبکہ وہ ڈبہ جس میں چیز ہے منحنی کا تقریباً ۲۴ گز فاصلہ طے کرے گا ۔ اس کی افقی رفتار معلوم کرو جبکہ وہ تختے کو چھوڑتی ہے ۔

(۲۱۶)

۲ ۔۔ ایک غبارہ ایسی چال سے اوپر وار حرکت کر رہا ہے جو ہر ثانیہ میں ۴ فٹ فی ثانیہ کی شرح سے بڑھ رہی ہے ۔ معلوم کرو کہ ۱۰ پونڈ کے ایک جسم کا وزن جبکہ اس کو کمانی دار ترازو کے ذریعہ غبارے میں معلوم کیا جائے اُس وزن سے کسقدر فرق رکھیگا جو معمولی حالات میں حاصل ہوتا ہے ۔

۳ ۔۔ ایٹوڈ کی مشین ترازو کے ایک پلڑے پر رکھی گئی ہے اور مشین کی ڈوری کو کلپ کے ذریعہ حرکت کرنے سے روکا گیا ہے ۔ ثابت کرو کہ کلپ کو جدا کرتے ہی مشین کا ظاہری وزن بقدر

$$\frac{(ک - ک')}{ک + ک'} \text{ ج}$$

کے تخفیف ہوگا جہاں ک، کَ لٹکے ہوئے وزن ہیں۔

۴۔ طول ل اور وزن و کی ایک ایکساں زنجیر ایک چکنی کھونٹی پر سے گذرتی ہے اور اس کی ہر جانب انتصاباً لٹکتی ہے۔ اگر زنجیر آزادانہ حرکت کر رہی ہو تو ثابت کرو کہ جب ایک جانب اس کا طول لا ہوتا ہے تو کھونٹی پر دباؤ

$$\frac{۴ \text{ لا } (\text{ل} - \text{لا})}{\text{ل}^{۲}} \text{ و}$$

ہے۔

۵۔ ایک نل سے پانی کی دھار زمین تک انتصاباً گرتی ہے اور اس کی ابتدائی رفتار قابل نظر انداز ہے۔ ثابت کرو کہ اس پانی کا مرکز ثقل جو کسی آن ہوا میں رہتا ہے زمین سے اوپر اس فاصلہ کا دو تہائی ہے جو زمین اور نل کے درمیان ہے۔

۶۔ وزن و کی ایک وزنی ایکساں زنجیر کو ایک ڈوری سے باندھ کر ڈوری کو تناؤ ت سے اوپر اٹھایا گیا ہے۔ زنجیر کے کسی نقطہ پر تناؤ دریافت کرو۔

۷۔ ایک زنجیر ف ٹن کا مستقل بوجھ برداشت کر سکتی ہے۔ ثابت کرو کہ سکون سے سکون تک کم سے کم وقت جس میں زنجیر و ٹن کے ایک وزن کو انتصاباً فاصلہ ف میں سے اٹھا اور اتار سکتی ہے

$$\sqrt{\frac{۲ \text{ف}}{\text{ج}} \cdot \frac{\text{ف}}{\text{ف} - \text{و}}} \text{ ثانیے}$$

ہوگا۔

۸۔ چرخیوں کے ایک نظام میں ایک ثابت اور ایک حرکت پذیر قالب ہے۔ رسی حرکت پذیر قالب کے محور سے بندھی ہے اور اس کے بعد ثابت قالب پر سے گذرتی ہے اور پھر حرکت پذیر قالب کے نیچے سے اور پھر ثابت قالب پر سے۔ وزن ف معلوم کرو جس کو اگر رسی سے باندھ دیا جائے تو وہ معلومہ وزن و کو جو حرکت پذیر قالب سے بندھا ہے سہار سکے۔ (قالب اس قدر چھوٹے ہیں کہ رسی کے تمام سیدھے حصوں کو متوازی خیال کیا جا سکتا ہے)۔

اگر اوزان متوازن نہ ہوں تو ثابت کرو کہ و کا نیچے وار اسراع

$$\frac{\text{و} - ۳ \text{ف}}{\text{و} + ۹ \text{ف}} \text{ج}$$

ہوگا جب کہ رسی کے وزن کو نظر انداز کر دیا گیا ہو اور حرکت پذیر قالب کا وزن و میں شامل ہو۔

۹ — ایک چرخی جو کُل بوجھ و کو سہارے ہوئے ہے رسی کے ایک حلقہ میں لٹکائی گئی ہے یہ رسی دو ثابت چرخیوں پر سے گذرتی ہے اور اِس کے سِروں سے اوزان ف اور ق آزادانہ لٹک رہے ہیں۔ رسی کا ہر حصہ انتصابی ہے۔ ثابت کرو کہ جب اس نظام کو چھوڑ دیا جاتا ہے تو و ساکن رہے گا یا ایکساں رفتار سے حرکت کریگا (۲۱۷)

بشرطیکہ $\frac{1}{\text{ف}} + \frac{1}{\text{ق}} = \frac{4}{\text{و}}$ اور کہیں رگڑ نہ ہو۔

اگر یہ ربط موجود نہ ہو تو و کا اسراع معلوم کرو۔

۱۰ — ایک ذرہ جو جاذبہ کے تحت گر رہا ہے کسی خاص ثانیے میں ۱۰۰ افٹ طے کرتا ہے۔ اِس کے بعد ۱۰۰ افٹ طے کرنے میں اُسے کتنا وقت لگیگا۔ ہوا کی مزاحمت نظر انداز کی گئی ہے۔

اگر مزاحمت کی وجہ سے وقت ۹ء ثانیہ لگے تو مزاحمت (مستقل فرض کردہ) کی نسبت ذرہ کے وزن کے ساتھ معلوم کرو۔

۱۱ — ثابت کرو کہ کسی منحنی سے کسی دوسرے منحنی تک (جو اُسی انتصابی مُستوی میں ہے) سریع ترین اُتار کا خط اِن منحنیوں کے اُن نقطوں پر کے عمادوں کے ساتھ مساوی زاوئے بناتا ہے جن پر وہ اِن سے ملتا ہے۔

۱۲ — ایک انتصابی دائرے کے محیط پر اُس نقطہ کا محل معلوم کرو کہ اُس سے مرکز تک خط مستقیم میں اُتار کا وقت وہی ہو جو زیر ترین نقطہ تک اُتار میں صرف ہوتا ہے۔

۱۳ — ماسکہ سے مکافی تک تیز ترین اُتار کا خط معلوم کرو جبکہ مکافی کا محور انتصابی ہو اور راس اوپر وار۔ نیز ثابت کرو کہ اِس خط کا طول وتر خاص کے مساوی ہے۔

۱۴ — ایک ناقص کو اس طرح لٹکایا گیا ہے کہ اِس کا محور اعظم انتصابی ہے۔

وہ قطر معلوم کرو جس کے نیچے کوئی ذرہ کم سے کم وقت میں گر سکتا ہے۔ خروج المرکز کی کم سے کم کیا قیمت ہے تاکہ یہ قطر محور اعظم نہ ہو سکے۔

۱۵۔ ایک گولی کو ایک انتصابی نشانہ پر فائر کرنا مقصود ہے تاکہ وہ نشانے پر علی القوائم ٹکرائے۔ اگر گولی کی رفتار و ہو اور فائرنگ کے نقطے سے نشانے کا فاصلہ ا ہو تو ثابت کرو کہ گولی کا زاویہ ارتفاع $\frac{1}{2}$ جب$^{-1}$ $\left(\frac{2\,\text{اج}}{\text{و}^2}\right)$ ہونا چاہیئے اور ثابت کرو کہ نشانے کا وہ نقطہ جس پر ضرب پڑتی ہے اُس نقطہ کی بہ نسبت نصف ارتفاع پر ہوگا جس کی جانب نشانہ باندھا جاتا ہے۔

۱۶۔ ایک گولی کو ایک انتصابی نشانے پر فائر کیا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ اگر گولی کو فائر کرنے والا شخص نشانے پر گولی کے ظل کو دیکھے تو ظل یکساں رفتار سے حرکت کرتا نظر آئے گا۔

۱۷۔ ایک بندوق دو گولیوں کو فائر کرتی ہے، ایک کو رفتار و کے ساتھ زاویہ ارتفاع عہ پر اور دوسری کو رفتار وَ کے ساتھ زاویہ ارتفاع عہَ پر (عہ > عہَ) اور گولیاں ایک ہی انتصابی مستوی میں جاتی ہیں۔ ثابت کرو کہ گولیاں ٹکرائیں گی اگر فائرنگ کے درمیان وقفہ

$$\frac{2}{\text{ج}}\;\frac{\text{ووَ جب (عہ - عہَ)}}{\text{و جب عہ + وَ جب عہَ}}$$

ہے۔

۱۸۔ ا، ب، ج، ایک افقی خط میں ترتیب وار تین نقطے ہیں اور اب ۶۴۰ فٹ ہے۔ ایک ذرہ کو ا سے رفتار ۳۹۰ فٹ فی ثانیہ سے اُس سمت میں پھینکا گیا ہے جو اج کے ساتھ زاویہ مس$^{-1}$ $\frac{5}{12}$ بناتی ہے۔ اُسی آن ایک دوسرے ذرہ کو ب سے رفتار ۲۵۰ فٹ فی ثانیہ سے اُس سمت میں پھینکا گیا ہے جو بج کے ساتھ زاویہ مس$^{-1}$ $\frac{3}{4}$ بناتی ہے۔ ثابت کرو کہ یہ ذرے ٹکرائیں گے، نیز معلوم کرو کہ کب اور کہاں؟

۱۹۔ ایک توپ ۴۰۰ فٹ فی ثانیہ کی رفتار سے گولے سر کرتی ہے۔

ایک پہاڑی، مسطح مستوی پر ۲۰۰ فٹ بلند ہے اور توپ مستوی کے اس نقطہ سے ۲۰۰۰ گز کے فاصلہ پر ہے جو پہاڑی کے سرے کے انتصاباً نیچے ہے۔ پہاڑی کے سرے کے عین پیچھے کتنا فاصلہ توپ کے گولوں سے محفوظ ہوگا۔

۲۰۔ ایک بندوق کی مکھیاں غلط نصب ہیں جس کی باعث گولی تین فیصدی زیادہ دور تک جاتی ہے بہ نسبت اُس فاصلے کے جو مکھیوں سے معلوم ہوتا ہے۔ ایک نشانہ باز جو بندوق کی اِس خطا سے واقف نہیں ہے ایک نشان پر جو ۱۰۰۰ گز کے فاصلہ پر ہے نشانہ باندھتا ہے۔ اگر گولی کی رفتار ۱۲۰۰ فٹ فی ثانیہ ہو تو ثابت کرو کہ گولی نشان سے تقریباً ایک گز اوپر سے گذر جائے گی۔

۲۱۔ ایک بندوق کی مکھیاں درست ہیں اور ا فٹ فاصلہ پر کسی چیز پر نشانہ باندھنے کے لیے بندوق کو زاویہ عہ تک اٹھانا پڑتا ہے۔ نشانہ باز کا ہاتھ تھرتھرانے کی وجہ سے بندوق اُن سمتوں میں رہتی ہے جو اصلی سمت سے چھوٹے زاویہ طہ کے اندر کہیں واقع ہو سکتی ہیں۔ ثابت کرو کہ اگر نشانہ باز گولیوں کو متواتر فائر کرے تو وہ نقطے جن پر گولیوں کی ضرب پڑے گی سب کے سب ایک چھوٹے قطع ناقص کے اندر واقع ہوں گے جس کے نیم محاور ا طہ جم عہ اور ا طہ (ا ـ سس^2 عہ) ہوں گے۔

جب، عہ = $\frac{\pi}{4}$ تو اِس قطع ناقص کا محور اصغر معدوم ہوتا ہے اور اِس لیے گولیوں کو ایک خط مستقیم میں واقع ہونا چاہئے۔ اِس نتیجہ کا مطلب بیان کرو۔

۲۲۔ ایک ذرہ سکون سے ایک چکنے کرہ کے بلند ترین نقطے سے اس کی بیرونی سطح پر نیچے والہ پھسلتا ہے۔ وہ کرہ سے نقطہ ف پر جدا ہوتا ہے اور فضا میں ایک قطع مکافی مرتسم کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ مکافی کے نقطہ ف پر کا دائرۂ انحنا مرتب کو مس کریگا۔

۲۳۔ ایک ذرہ کو ایک چکنے کرہ کی اندرونی سطح کے زیرترین نقطے سے افقاً پھینکا گیا ہے۔ وہ کرہ کی سطح سے نقطہ ف پر جدا ہوتا ہے اور ایک قطع مکافی مرتسم کرنے کے بعد پھر کرہ سے نقطہ ق پر ٹکراتا ہے۔ ثابت کرو کہ ف ق اور ف پر کا مماس، انتصابی کے ساتھ مساوی زاویے بناتے ہیں۔

۲۴ — ایک توپ کو ایک پہاڑی کے رُخ پر جو مُستوی ہے نصب کیا گیا ہے ثابت کرو کہ وہ کُل رقبہ جو توپ کی زد میں رہتا ہے ایک قطع ناقص ہے جس کا ماسکہ توپ پر ہے اور جس کا خروج المرکز پہاڑی کے میلان کی جیب ہے اور نیم وتر خاص اُس ارتفاع کے نصف کے مساوی ہے جس تک گولی کی ابتدائی رفتار گولی کو لیجا سکتی ہے

۲۵ — ایک پہاڑی کا رُخ مستوی ہے اور اِس کا میلان عہ ہے۔ ایک توپ کو پہاڑی پر کے ایک قلعہ پر جس کا ارتفاع ع ہے نصب کیا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ پہاڑی کے مُستوی رُخ کا وہ رقبہ جو توپ کی زد میں رہتا ہے

۴ π ر (ر + ع جم² عہ) قط² عہ

ہے جہاں گولی کی ابتدائی رفتار √(۲ ج ر) ہے۔

۲۶ — ایک کُروی خول جس کی کمیت ک ہے پھٹ پڑتا ہے جبکہ وہ زمین کے اوپر ف ارتفاع پر ناقابل قدر رفتار سے حرکت کر رہا ہے۔ خول بہت چھوٹے ذرات میں منقسم ہو جاتا ہے اور اِن میں سے ہر ذرہ کرہ کے مرکز سے رفتار و کے ساتھ مرکز سے دُور حرکت کرتا ہے اور بالآخر زمین پر گرتا ہے۔ اُن ذروں کی کُل کمیت معلوم کرو جو اُس نقطہ سے جو خول کے انتصاباً نیچے ہے کسی مقررہ فاصلہ پر اکائی رقبہ میں ملیں گے۔

۲۷ — ایک خول ہوا میں پھٹتا ہے اور اِس کے تمام ذرے دھماکہ کی باعث مساوی رفتاریں حاصل کرتے ہیں۔ ثابت کرو کہ کسی آن ذرے ایک کرہ پر واقع ہوں گے اور اِن کے راستوں کے ماسکے بھی ایک کرہ پر واقع ہوں گے اور راس ایک کرہ نما پر واقع ہوں گے۔

۲۸ — ایک ذرہ ایک کھُردرے مائل مستوی ا ب کے نیچے پھسلتا ہے، وہ مُستوی کے نقطہ ا سے حالت سکون سے حرکت کرنا شروع کرتا ہے اور مُستوی کو نقطہ ب پر چھوڑنے کے بعد آزادانہ ایک قطع مکافی مرتسم کرتا ہے اگر مرتسمہ مکافی کا ماسکہ س ہے تو ثابت کرو کہ زاویہ ا س ب = π/۲ + صہ جہاں صہ رگڑ کا زاویہ ہے۔

۲۹ — ایک قلعہ سے پانی پر تیرنے والے ایک نشان کا مشاہدہ کیا گیا تو

معلوم ہوا کہ اس کا زاویہ انخفاض افق کے نیچے عہ ہے۔ اِس نشان پر ایک توپ کو ارتفاع یہ پر فائر کیا گیا لیکن گولہ پانی پر اُس نقطہ سے جا لگا جس کا انخفاض عہَ تھا۔ ثابت کرو کہ نشان پر ضرب لگانے کے لیے گولے کو ارتفاع طہ پر فائر کرنا چاہئے جہاں

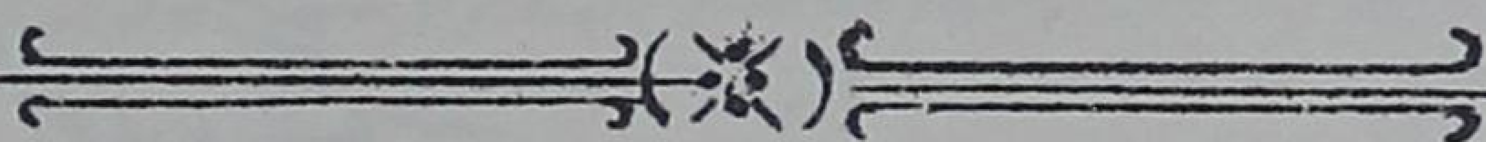
$$\frac{\text{جم طہ جیب (طہ + عہ)}}{\text{جم عہ جیب (یہ + عہَ)}} = \frac{\text{جم}^{2}\text{ عہ جیب عہَ}}{\text{جم}^{2}\text{ عہَ جیب عہ}}$$

۳۰ — ثابت کرو کہ کم سے کم توانائی جس کے ذریعہ ایک ذرہ کو ایک دیوار کے اوپر پھینکا جا سکتا ہے جب کہ دیوار پھینکنے کے نقطہ سے ا فاصلہ پر ہو حسب ذیل ہے :—

$$\frac{1}{2}\text{ ک ج ا } \frac{1 + \text{سس } \frac{1}{2}\text{ عہ}}{1 - \text{سس } \frac{1}{2}\text{ عہ}}$$

جہاں پھینکنے کے نقطہ پر دیوار کے سرے کا ارتفاع عہ ہے۔

۳۱ — نصف قطر ا کا چکی کا ایک پاٹ اس طرح گھومتا ہے کہ اِس کی کور کی رفتار و ہے اور پاٹ کی کور سے آٹے کے ذرات نکلتے ہیں ثابت کرو کہ ان کے راستوں کا لفاف ایک قطع مکافی ہے جس کا محور انتصابی ہے اور جس کا ماسکہ پاٹ کے مرکز کے انتصاباً اوپر $\frac{\text{ا}^{2}\text{ج}}{2\text{ و}^{2}}$ کے فاصلہ پر ہے۔



(۲۲۰)

نواں باب

ذروں کے نظاموں کی حرکت

حرکت کی مساواتیں

۱۷۶ ــ اس باب میں ذروں کے نظاموں کی حرکت پر بحث کی جائے گی اور اُن اعمال اور تعاملات کا بھی لحاظ رکھا جائے گا جو ذروں کے مختلف زوجوں کے درمیان وقوع پذیر ہو سکتے ہیں۔ ابتداً اُن نتیجوں کو جو ایک ذرہ کے لیے حاصل ہو چکے ہیں اختصاراً بیان کرنا اور انہیں پہلے کی بہ نسبت زیادہ تحلیلی شکل میں رکھنا سہولت بخش ہوگا۔

ایک واحد ذرہ پر عمل کرنے والی قوتوں کے کُل نظام کا حاصل ایک واحد قوت ہونی چاہئے کیونکہ یہ سب قوتیں ایک نقطہ پر عمل کرتی ہیں۔ فرض کرو کہ ہم اِس حاصل کو ف سے تعبیر کرتے ہیں اور تین قائم محوروں کی سمت میں اِس کے اجزائے ترکیبی کو لا، ما، ے سے ظاہر کرتے ہیں۔

نیز چونکہ ذرہ کو ایک نقطہ سمجھا جا سکتا ہے اِس لئے اس کا ایک مُعین اسراع ع ہونا چاہئے اور چونکہ ع ایک سمتی ہے اس لئے اس اسراع کو محدود کے تین محوروں میں تین اجزائے ترکیبی ع، عَ، عٕ کا مرکب فرض کیا جا سکتا ہے۔

حرکت کے دوسرے قانون سے رشتہ

ف = ک ع

حاصل ہوتا ہے۔

لیکن حرکت کے دوسرے قانون سے اِس سے کچھ زیادہ بھی معلوم ہوتا ہے اور وہ یہ کہ ف اور غ کی سمتیں ایک ہی ہیں۔ فرض کرو کہ اِس واحد سمت کی سمتی جیوب التمام لہ، مہ، نہ ہیں تو

لا = لہ ف، ما = مہ ف، ے = نہ ف

اور نیز $ع_{لا}$ = لہ ع، $ع_{ما}$ = مہ ع، $ع_{ی}$ = نہ ع

اِن رشتوں اور رشتہ (۶۵) کے ذریعہ حسب ذیل مساواتیں حاصل ہوتی ہیں:

$$\left.\begin{aligned} لا &= ک\,ع_{لا} \\ ما &= ک\,ع_{ما} \\ ے &= ک\,ع_{ی} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۶۶)$$

(۲۲۱) یہ مساواتیں تحلیلی شکل میں ایک ذرہ کی حرکت کی ہیں۔ یہ ریاضی کی زبان میں صرف حرکت کے دوسرے قانون کو بیان کرتی ہیں۔

۱۷۔ فرض کرو کہ کسی آن ذرہ کے محدد لا، ما، ی ہیں اور فرض کرو کہ اس کی رفتار کے تین اجزائے ترکیبی ؏، و، ط ہیں۔ جزو ترکیبی ؏، محور لا پر اُس رفتار کو تعبیر کرتا ہے جو محور لا پر متحرک نقطہ کے ظِل کی ہے اور کسی آن اِس نقطہ کا فاصلہ مبدأ سے صرف لا ہے۔ اِس لیے رفتار کی تعریف سے

$$؏ = \frac{فرلا}{فرت} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۶۷)$$

اسی طرح

$$و = \frac{فرما}{فرت}$$

$$ط = \frac{فری}{فرت}$$

وہ شرح جس سے رفتار کا جزو ترکیبی لا بڑھتا ہے $\frac{فر؏}{فرت}$ ہے لیکن

اِس کو ع لا فرض کیا جا چکا ہے کیونکہ وہ اسراع کا جزو ترکیبی لا ہے۔ اس طرح

ع لا = فر ع / فر ت

اسی طرح

ع ما = فر و / فر ت

ع ی = فر ط / فر ت

ع، و، ط کی جو قیمتیں اوپر حاصل ہوئی ہیں اُن کو استعمال کرنے سے یہ مساواتیں ہو جاتی ہیں:

ع لا = فر۲ لا / فر ت۲

ع ما = فر۲ ما / فر ت۲

ع ی = فر۲ ی / فر ت۲

(۲۲۲) حرکت کی مساواتوں (۶۶) میں اسراع کے اجزائے ترکیبی کے اِن جملوں کو درج کرنے سے یہ مساواتیں حسب ذیل نئی شکل میں حاصل ہوتی ہیں:

لا = ک فر۲ لا / فر ت۲

ما = ک فر۲ ما / فر ت۲　　　　(۶۸)..........

ے = ک فر۲ ی / فر ت۲

۱۷۸ — فرض کرو کہ ذروں کا ایک نظام ـــ ک، نقطہ لا، ما، ی پر ک۲ نقطہ لا۲، ما۲، ی۲ پر وغیرہ ـــ ہے اور فرض کرو کہ اِن پر عمل کرنے والی قوت کے

اجزائے ترکیبی $لا_۱$، $ما_۱$ ے$_۱$، $لا_۲$، $ما_۲$ ے$_۲$ وغیرہ ہیں۔
اب مساواتوں (۶۸) سے حاصل ہوتا ہے

$$لا_۱ = ک_۱ \frac{فر^۲ لا_۱}{فر ت^۲}$$

$$لا_۲ = ک_۲ \frac{فر^۲ لا_۲}{فر ت^۲}$$ ، وغیرہ

اس لئے جمع کرنے سے $\sum لا = \sum ک \frac{فر^۲ لا}{فر ت^۲}$ ...... (۶۹)

جہاں $\sum$، نظام کے تمام ذروں پر عمل جمع کو تعبیر کرتا ہے۔
اِس مساوات کی دائیں جانب کا رکن $\sum لا$، ولا کی سمت میں اُن تمام قوتوں کے اجزائے ترکیبی کا مجموعہ ہے جو نظام کے تمام ذروں پر عمل کرتی ہیں۔ دفعہ ۵۰ کی بموجب اِن قوتوں کو دو جماعتوں میں تقسیم کیا جا سکتا ہے:

(ا) بیرونی قوتیں ــــ وہ قوتیں جو ذروں پر نظام کے باہر سے عمل کرتی ہیں۔

(ب) اندرونی قوتیں ــــ وہ قوتیں جو نظام کے ذروں کے درمیان ایک دوسرے پر عمل کرتی ہیں۔

حسب دفعہ ۵۰ یہ معلوم ہوتا ہے کہ قوتوں کی اِس دوسری جماعت سے $\sum لا$ میں کوئی اضافہ نہیں ہوتا کیونکہ یہ سب قوتیں جوڑوں میں وقوع پذیر ہوتی ہیں اور ہر جوڑا عمل اور تعامل پر جس کے اجزائے ترکیبی مساوی اور مخالف ہوتے ہیں مشتمل ہوتا ہے۔

پس $\sum لا$ کو محسوب کرنے میں ہمیں صرف بیرونی قوتوں کو ملحوظ رکھنا ہوگا۔

(۲۲۳) مساوات (۶۹) کی بائیں جانب کی رقم $\sum ک \frac{فر^۲ لا}{فر ت^۲}$ کی شکل بھی

بدلی جا سکتی ہے۔ کیونکہ مساوات (۶۷) کی رو سے ع = فر ع / فر ت اور اس لیے

فر² لا / فر ت² کی قیمت فر ع / فر ت ہے، اس لیے

Σ ک فر² لا / فر ت² = Σ ک فر ع / فر ت = فر / فر ت (Σ ک ع) (۷۰)

کسی ذرہ کے معیار حرکت سے مُراد اس کی کمیت اور رفتار کا حاصل ضرب ہے (دفعہ ۲۰) اس لیے ذرہ کا معیار حرکت ایک سمتی ہے جس کے اجزائے ترکیبی ک ع، ک و، ک ط ہیں اور ک ع کو معیار حرکت کا جزو ترکیبی لا کہا جا سکتا ہے۔ نظام کا ہر ذرہ معیار حرکت رکھیگا اور اس کے اجزائے ترکیبی لا، Σ ک ع ہوں گے اور یہ وہ مقدار ہے جو مساوات (۷۰) کی بائیں جانب واقع ہے

اب ہم مساوات (۶۹) کی جگہ حسب ذیل مساوات رکھ سکتے ہیں:

Σ لا = فر / فر ت (Σ ک ع) (۷۱)

جہاں Σ لا سے بیرونی قوتوں کے اجزائے ترکیبی لا کا مجموعہ تعبیر ہوتا ہے اور Σ ک ع، معیار حرکت کے اجزائے ترکیبی لا کا مجموعہ ہے۔

خطی معیار حرکت کا بقا

۱۷۹ — جب کوئی بیرونی قوتیں موجود نہ ہوں تو Σ لا = ۰ اور اس لیے

فر / فر ت (Σ ک ع) = ۰، (۷۲)

اسی طرح

فر / فر ت (Σ ک و) = ۰، (۷۳)

فر / فر ت (Σ ک ط) = ۰، (۷۴)

اِن مساواتوں سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ مقداریں

$$\sum \text{ک ع}،\quad \sum \text{ک و}،\quad \sum \text{ک ط}$$

وقت کے ساتھ متغیر نہیں ہوتیں ۔ یعنے کُل معیار حرکت کے اجزائے ترکیبی مستقل رہتے ہیں اور اِس لیے کل معیار حرکت جسے ایک سمتی تصور کیا گیا ہے مستقل ہے ۔ اِس کو معیار حرکت کے بقا کا اصُول کہتے ہیں ۔ اسے الفاظ میں یوں بیان کیا جا سکتا ہے :

جب ذروں کا کوئی نظام حرکت کرتا ہے درآنحالیکہ اِس پر کوئی بیرونی قوتیں عمل نہیں کرتیں تو نظام کا کُل معیار حرکت مقدار اور سمت میں مستقل رہتا ہے ۔

نظام کے مرکز ثقل کی حرکت

۱۸۰ ـــ اب ہم عام مساواتوں (۷۱)

$$\sum \text{لا} = \frac{\text{فر}}{\text{فرت}} \left(\sum \text{ک ع}\right) \text{ وغیرہ} \qquad (۷۵)$$

کی طرف رجوع کرتے ہیں ۔

فرض کرو کہ نظام کے ذروں کے مرکز ثقل کے محدد کسی آن $\bar{\text{لا}}$، $\bar{\text{ما}}$، $\bar{\text{ہی}}$ ہیں اور فرض کرو کہ اِس نقطہ کی رفتار کے اجزائے ترکیبی $\bar{\text{ع}}$، $\bar{\text{و}}$، $\bar{\text{ط}}$ سے تعبیر ہوتے ہیں ۔

اب

$$\bar{\text{ع}} = \frac{\text{فر}\,\bar{\text{لا}}}{\text{فرت}} \text{، وغیرہ}$$

$\bar{\text{لا}}$ کی قیمت بموجب مساوات (۸) حسب ذیل ہے:

$$\bar{\text{لا}} = \frac{\sum \text{ک لا}}{\sum \text{ک}}$$

$$\therefore \quad \bar{ع} = \frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}} = \frac{\text{فر}}{\text{فرت}}\left(\frac{\Sigma\,\text{ک لا}}{\Sigma\,\text{ک}}\right)$$

$$= \frac{\Sigma\,\text{ک}\frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}}}{\Sigma\,\text{ک}} = \frac{\Sigma\,\text{ک ع}}{\Sigma\,\text{ک}}$$

پس اگر تمام ذروں کی کل کمیت Σ ک = ک تو

$$\Sigma\,\text{ک ع} = \text{ک}\,\bar{ع} \qquad (۲۲۵)$$

اب مساوات (۷۵) ہو جاتی ہے

$$\Sigma\,\text{لا} = \text{ک}\,\frac{\text{فر}\bar{ع}}{\text{فرت}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (۷۷)$$

اسی طرح مساواتیں

$$\Sigma\,\text{ما} = \text{ک}\,\frac{\text{فر}\bar{و}}{\text{فرت}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (۷۸)$$

$$\Sigma\,\text{ے} = \text{ک}\,\frac{\text{فر}\bar{ط}}{\text{فرت}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (۷۹)$$

حاصل ہوتی ہیں۔

چونکہ

$$\frac{\text{فر}\bar{ع}}{\text{فرت}}\ ،\ \frac{\text{فر}\bar{و}}{\text{فرت}}\ ،\ \frac{\text{فر}\bar{ط}}{\text{فرت}}$$

مرکز ثقل کے اسراع کے اجزائے ترکیبی ہیں اس لئے ہم دیکھتے ہیں کہ مرکز ثقل کی حرکت وہی ہے جو ہوتی اگر اس کی بجائے کمیت ک کا ایک ذرہ رکھا جاتا اور اس پر وہ قوت عمل کرتی جس کے اجزائے ترکیبی Σ لا، Σ ما، Σ ے ہیں۔ نیز یہ قوت صرف وہ قوت ہے جو تمام بیرونی قوتوں کا حاصل ہے جبکہ ان قوتوں کو اس خیالی ذرہ پر عمل کرتا ہوا سمجھا جائے جس کے متعلق ہم نے فرض کیا ہے کہ وہ مرکز ثقل کے ساتھ حرکت کرتا ہے۔

۱۸۱ — اُس مخصوص صورت میں جس میں کوئی بیرونی قوتیں عمل نہ کریں مرکزِ ثقل حرکت کرتا ہے گویا کہ وہ ایک ایسا ذرہ ہے جس پر کوئی بیرونی قوتیں عمل نہیں کرتیں، اس لیے اس کی حرکت ایک خط مستقیم میں یکساں رفتار کی حرکت ہوگی۔

۱۸۲ — مرکزِ ثقل کی حرکت اِس مخصوص صورت میں اور اُس عام تر صورت میں جس میں بیرونی قوتیں عمل کرتی ہیں حسب ذیل دو قوانین کے تحت فرض کیجا سکتی ہے:

قانون (۱) — ذروں کے ہر نظام کا مرکزِ ثقل سکون کی حالت میں رہتا ہے یا ایک خط مستقیم میں یکساں حرکت کی حالت میں اِلّا آنکہ اِس نظام پر بیرونی قوتوں کا عمل اِس حالت کو بدلنے پر مجبور کرے۔

قانون (۲) — جب ذروں کے کسی نظام پر بیرونی قوتیں عمل کرتی ہیں تو مرکزِ ثقل کی حرکت وہی ہوتی ہے جو ہوتی اگر ذروں کی تمام کمیتیں ایک واحد ذرہ میں مرتکز ہوتیں اور یہ ذرہ مرکزِ ثقل کے ساتھ حرکت کرتا اور اِس پر تمام بیرونی قوتیں لگائی جاتیں۔

اِن قوانین کو نیوٹن کے قوانین (۱) اور (۲) کی توسیعات خیال کیا جاسکتا ہے جبکہ انہیں ذروں کے ایک نظام کی حرکت پر عائد کیا جائے۔ (۲۲۶)
اب ہم اس امر کی توجیہ کرسکتے ہیں کہ کیوں نیوٹن کے دوسرے قانون کو محدود جثّے کے اجسام کی حرکت پر عائد کرنا اکثر جائز ہے گویا کہ یہ اجسام ذرے ہیں (مقابلہ کرو دفعہ ۲۶ کے ساتھ)۔

معیارِ حرکت کے بقا کا اصول کسی حرکیاتی مسئلہ کے حل کرنے میں

جس میں صرف دو اجسام حرکت میں ہوں اکثر کافی ثابت ہوتا ہے۔

توضیحی مثال

کمیت ک کا ایک گولہ کمیت ک کی توپ سے سر کیا گیا ہے اور توپ افقی پٹڑیوں کے ایک زوج پر پیچھے حرکت کرنے میں آزاد ہے۔ توپ کے پیچھے ہٹنے کی رفتار معلوم کرو اور اس کے ہٹنے کا اثر گولے کی حرکت پر دریافت کرو۔

فرض کرو کہ توپ کو سر کرنے سے پیشتر وہ ایسے محل میں قائم ہے جو افق سے زاویہ عہ بناتی ہے اور فرض کرو کہ گولے کی ابتدائی رفتار یعنے وہ رفتار جو توپ کے لحاظ سے اس کے دہانے سے خارج ہوتے وقت ہوتی ہے ع ہے اور گولے کی کمیت ک ہے۔

فرض کرو کہ زمین کے لحاظ سے گولے کی رفتار کے اجزائے ترکیبی افقی اور انتصابی ع اور و ہیں اور فرض کرو کہ توپ کی پیچھے کی رفتار ع ہے جس کو افقی سمت میں اُس سمت کے خلاف پیمائش کیا گیا ہے جس کی جانب توپ قائم کی گئی ہے۔

وہ نظام جو توپ، بارود، اور گولے پر مشتمل ہے بیرونی قوتوں کے عمل سے آزاد نہیں ہے لیکن یہ قوتیں "یعنے نظام کا وزن اور زمین کے ساتھ اس کا تعامل" کوئی افقی جزو ترکیبی نہیں رکھتیں۔ اس لیے نظام کا افقی معیار حرکت دھماکے سے غیر متبدل رہنا چاہئے۔ یہ افقی معیار حرکت ابتداً صفر تھا اور اس لیے وہ صفر رہے جبکہ گولہ توپ سے نکلتا ہے۔ پس بارود کے وزن کو نظرانداز کرتے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$ک ع - ک ع = ۰ \quad \ldots\ldots\ldots (۱)$$

توپ کے لحاظ سے گولے کی جو رفتار ہے اس کے اجزائے ترکیبی

$$ع + ع، و$$

ہیں۔ لیکن یہ رفتار، رفتار ع ہونی چاہئے جو افق سے زاویہ عہ بناتی ہے اسلئے

ۓ + ے = و جم عہ　　(ب)

و = و جب عہ　　(ج)

مساوات (ا) اور مساوات (ب) سے ہم معلوم کرتے ہیں

$$\frac{ۓ}{گ} = \frac{ے}{ک} = \frac{و\ جم\ عہ}{گ + ک}$$

پس پیچھے ہٹنے کی رفتار ہے

$$ۓ = \frac{ک}{گ + ک}\ و\ جم\ عہ$$

گولے کی اصلی رفتار کے اجزائے ترکیبی ہیں　　(۲۲۷)

$$ے = \frac{ک}{گ + ک}\ و\ جم\ عہ$$

$$و = و\ جب\ عہ$$

اس طرح گولے کی اصلی رفتار

$$\sqrt{ے^2 + و^2} = و\left[1 - \frac{ک(۲گ + ک)}{(گ + ک)^2}\ جم^2\ عہ\right]^{\frac{1}{2}}$$

ہے اور زاویہ ارتفاع طہ مساوات

$$مس\ طہ = \frac{و}{ے} = \frac{گ + ک}{گ}\ مس\ عہ$$

سے حاصل ہوتا ہے۔

مثالیں

۱۔ ایک خالی ریلوے ڈبہ ۸ ٹن وزنی ساکن ہے، ایک دوسرا مشابہ ڈبہ جس پر ۲۴ ٹن کا بوجھ ہے اور جو ایک میل فی گھنٹہ کی شرح سے حرکت کر رہا ہے اول الذکر ڈبے سے ٹکراتا ہے اور یہ دونوں ڈبے باہم حرکت کرتے ہیں۔ ان کی مشترک رفتار معلوم کرو۔

۲۔ کمیت گ کی ایک توپ، کمیت ک کا ایک گولہ افقاً فائر کرتی ہے۔ ثابت کرو کہ بارود سے جتنا کام انجام پاتا ہے اس کی ایک کسر $\frac{ک}{گ+ک}$ توپ کو پیچھے دھکہ دینے میں ضائع ہوتی ہے۔

۳۔ کمیت ک کا ایک ذرہ، زاویہ ع کے ایک چکنے مائل مستوی پر نیچے پھسلتا ہے اور خود مستوی (جس کی کمیت گ ہے) ایک چکنے میز پر پھسلنے میں آزاد ہے۔ ذرہ اور مستوی کا اسراع معلوم کرو۔

۴۔ ایک خول کا مشاہدہ کیا گیا کہ وہ اُس وقت پھٹا جبکہ وہ اپنے راستے کے بلند ترین نقطہ پر تھا اور پھٹ کر وہ دو مساوی حصوں میں تقسیم ہوا جن میں سے ایک انتصاباً نیچے گرتا نظر آیا۔ ثابت کرو کہ دوسرا حصہ ایک قطع مکافی مرتسم کرے گا جس کا وتر خاص ابتدائی مکافی کے وتر خاص کا چار گنا ہوگا۔

۵۔ ایک گولی جس کا وزن $\frac{1}{2}$ اونس ہے ایک پرندے کو جس کا وزن ۵ پونڈ ہے لگتی ہے جبکہ وہ ہوا میں اُڑ رہا تھا۔ گولی کی ضرب پڑتے وقت گولی کی افقی رفتار ۱۰۰۰ فٹ فی ثانیہ تھی اور پرند زمین سے اوپر ۶۴ فٹ بلندی پر اسی افقی سمت میں رفتار ۲۰ فٹ ثانیہ سے اُڑ رہا تھا۔ ثابت کرو کہ پرند اُس مقام سے جہاں اُس پر مار پڑی تھی تقریباً ۲۵٫۲ فٹ آگے گریگا۔

۶۔ ۵۰۰۰ ٹن کا ایک جہاز جو ۲۰ بحری میل فی گھنٹہ کی شرح سے جا رہا ہے اچانک ایک وہیل مچھلی سے ٹکراتا ہے جس کا وزن ۱۲ ٹن ہے اور جو پانی کی سطح پر سو رہی ہے۔ جہاز کی چال کتنی گھٹیگی؟ (پانی کی رفتار کو نظر انداز کرو)۔

۷۔ ایک پارسل کو جس کا وزن ۲ ہنڈرویٹ ہے ایک ریل سے جو ۶۰ میل فی گھنٹہ کی شرح سے جا رہی ہے پھینکا گیا ہے۔ پھینکتے وقت اس کی افقی رفتار ٹرین کے لحاظ سے ۱۱ فٹ فی ثانیہ ہے اور پٹڑیوں کے علی القوائم ہے۔ وہ ۳ ہنڈرویٹ وزنی دستی گاڑی پر گرتا ہے جو ایک ہموار چبوترے پر حرکت کرنے میں آزاد ہے اور اِس کے پہیئے اس طرح ہیں کہ اِن کی حرکت پٹڑیوں سے ۳۰° کا زاویہ بناتی ہے۔ کس رفتار سے گاڑی حرکت میں آئے گی؟

(۲۲۸)

۸ — ۸ پونڈ کی ایک کمیت جو شمالاً ۱۰ فٹ فی ثانیہ کی رفتار سے حرکت کر رہی ہے ۶ پونڈ کی ایک کمیت سے جو شرقاً ۱۴ فٹ فی ثانیہ سے حرکت کر رہی ہے ٹکراتی ہے اور اس کی حرکت میں ۳۰° کا انصراف واقع ہوتا ہے اور اس کی رفتار بقدر ایک فٹ فی ثانیہ کے بڑھ جاتی ہے۔ ثابت کرو کہ دوسری کمیت کی رفتار بقدر ۳ء۷ فٹ فی ثانیہ کے گھٹ جاتی ہے۔ اس کی حرکت کی نئی سمت معلوم کرو۔

۹ — دو برف بجرے جن میں سے ہر ایک کی کمیت ک ہے کامل چکنے برف پر ساکن کھڑے ہیں اور ان کے پیندے ایک ہی سمت میں ہیں۔ ایک شخص، کمیت گ، ایک بجرے سے دوسرے پر کودتا ہے اور فوراً بعد ہی دوسرے سے پہلے پر واپس آتا ہے۔ ثابت کرو کہ بجروں کی انتہائی رفتاروں میں نسبت ک + گ : ک ہے۔

توانائی بالحرکت

۱۸۳ — ذروں کے کسی نظام کی توانائی بالحرکت کے مطالعہ کی ابتداء بہترین طریقہ پر اس طرح کی جاسکتی ہے کہ سب سے اول اس مشکل کی طرف اپنی توجہ کو منعطف کیا جائے جو اس کتاب میں تا حال زیر بحث نہیں آئی ہے۔ اس مشکل کی وضاحت ایک مثال کے ذریعہ کی جائے گی۔

فرض کرو کہ ایک جہاز پانی میں ۲۰ فٹ فی ثانیہ کی رفتار سے حرکت کر رہا ہے اور عرشہ پر سے ایک شخص کمیت ک کا ایک گولہ جہاز کے لحاظ سے ۳۰ فٹ فی ثانیہ کی رفتار سے آگے پھینکتا ہے۔ اگر یہ شخص فضاء میں ساکن ہوتا تو ہم کہہ سکتے کہ اس نے اتنا کام انجام دیا ہے جو گولے کی آخری توانائی بالحرکت کے مساوی ہے اور اس لئے $\frac{1}{2}$ ک $(۳۰)^2$ یا ۴۵۰ ک ہے لیکن جہاز کے عرشہ پر گولے کی ابتدائی رفتار ۲۰ فٹ فی ثانیہ تھی اور شخص اس رفتار کو ۵۰ تک بڑھاتا ہے۔ اس لیے گولے کی توانائی بالحرکت میں تبدیلی

$$\frac{1}{2}\text{ک}(۵۰)^2 - \frac{1}{2}\text{ک}(۲۰)^2$$

یعنے ۱۰۵۰ ک ہے۔ اگر اس سے اُس شخص کا کام تعبیر ہو تو ہمیں یہ فرض کرنا پڑتا ہے کہ جہاز کے عرشہ سے گولہ پھینکنا، زمین پر سے پھینکنے کی بہ نسبت دُگنے سے زیادہ سخت کام ہے۔ یہ صریحاً غلط ہے۔

۱۸۴۔ خطاء اس میں واقع ہوئی ہے کہ پھینکنے والا شخص نہ صرف گولے کو رفتار ایصال کرتا ہے بلکہ جہاز کو بھی۔ اگر وہ گولے کو آگے پھینکتا ہے تو اسکو ساتھ ہی معیار حرکت کے بقا کے اصول کی رو سے جہاز کو پیچھے وار رفتار ایصال کرنی چاہیے جس کا معیار حرکت گولے کے آگے دار معیار حرکت کے مساوی اور مخالف ہوگا۔

کل کام جو انجام پایا اُس تبدیلی کے مساوی ہے جو جہاز اور گولے کی توانائی بالحرکت میں پیدا ہوئی۔ (۲۲۹)

اب چونکہ حرکت کے دوسرے قانون کی رو سے کوئی قوت تنہا عمل نہیں کرسکتی اس لئے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ توانائی بالحرکت سے کام کو محسوب کرنے کی ہر صورت میں ایک سے زیادہ اجسام کی توانائی بالحرکت پر غور کرنا ہوگا۔ مثلاً ایک شخص جو زمین پر سے ایک گولے کو پھینکتا ہے نہ صرف گولے کو آگے جنبش دیتا ہے بلکہ اِس کے ساتھ ہی پوری زمین کو بھی پیچھے وار دھکا مارتا ہے اور اس لیے دونوں کی توانائی کو شمار کرنا ہوگا ورنہ غلط نتیجے برآمد ہوں گے۔

۱۸۵۔ ایک دوسری مشکل جو پہلی سے قریبی تعلق رکھتی ہے فوراً پیش ہوتی ہے۔ فرض کرو کہ ہم نے ایک گولے کو رفتار و سے جہاز کے عرشہ کی سمت میں جو خود رفتار و سے حرکت کر رہا ہے پھینکا ہے۔ ہم دیکھ چکے ہیں کہ ہمیں گولے کی توانائی کو $\frac{1}{2}$ ک و^2 فرض نہیں کرنا چاہیے لیکن کیا اس کو $\frac{1}{2}$ ک (و + و)^2 فرض کرنا کچھ زیادہ مناسب ہے؟ ہرگز نہیں کیونکہ وہ سمندر جس میں جہاز چل رہا ہے زمین کی گردش کے باعث رفتار وَ (فرض کرو) رکھتا ہے اور اس لئے توانائی کو اُسی سبب کی بناء پر

$\frac{1}{2}$ ک (و + و + وَ)^2

لینا ہوگا اور علیٰ ہذا ہم اس سلسلہ کو لاانتہا بڑھا سکتے ہیں۔ کوئی ایسا حوالے کا فریم معلوم ہونے سے جو کامل طور پر ساکن ہو توانائی بالحرکت کی اصلی قیمت معلوم کرنا ناممکن نظر آئے گا۔ مزید بریں یہ مشاہدہ طلب ہے کہ توانائی بالحرکت کے جملے جو مختلف حوالے کے فریموں کے حوالے سے حاصل ہوتے ہیں صرف مستقلوں کا ہی فرق نہیں رکھتے۔ مثلاً اُن دو جملوں کے درمیان فرق جو ہم نے سمندر کے لحاظ سے توانائی بالحرکت اور زمین کے مرکز کے لحاظ سے توانائی بالحرکت کے لیے معلوم کئے ہیں حسب ذیل ہے:

$\frac{1}{2}$ ک (و + و + وَ)^2 − $\frac{1}{2}$ ک (و + و)^2

= $\frac{1}{2}$ ک وَ^{2} + ک وَ (و + و)

یہ فرق نہ صرف ک اور وَ پر منحصر ہے بلکہ و اور و پر بھی۔ یہ فرق مستقل نہیں ہے اور اس لیے معدوم نہیں ہوتا جب ہم توانائی بالحرکت کا اضافہ محسوب کرتے ہیں جو قوتوں کے عمل سے پیدا ہوا ہے۔

حسب ذیل مسئلوں سے ایک ایسے طریقے کا اظہار ہوتا ہے جس سے یہ مشکلیں اور اِن کی جیسی دوسری رفع ہو سکتی ہیں۔

۱۸۶۔ مسئلہ۔ متحرک ذروں کے کسی نظام کی توانائی بالحرکت، ذروں کے مرکز ثقل کے لحاظ سے حرکت کی توانائی بالحرکت اور اُس واحد ذرہ کی توانائی بالحرکت کے مجموعے کے مساوی ہوتی ہے جس کی کمیت نظام کی کُل کمیت کے مساوی ہو اور جو مرکز ثقل کے ساتھ حرکت کرے۔

فرض کرو کہ نقطہ لا$_1$، ما$_1$، ی$_1$ پر ذرہ ک$_1$ ہے اور علیٰ ہذا۔ فرض کرو کہ محددوں کی پیمائش اِس طرح عمل میں آئی ہے کہ مرکز ثقل کو مبدا لیا گیا ہے فرض کرو کہ رفتاریں ع$_1$، د$_1$، ط$_1$ وغیرہ سے تعبیر ہوتی ہیں اور فرض کرو کہ ان کی

پیمائش ایک فریم کے لحاظ سے کی گئی ہے جو مرکز ثقل کے ساتھ حرکت کرتا ہے، اس لئے

$$\text{ع}_1 = \frac{\text{فرلا}_1}{\text{فرت}} \text{، وغیرہ}$$

فرض کرو کہ مرکز ثقل کی رفتار کسی حوالے کے فریم کے حوالے سے جو خود متحرک ہے یا ساکن ہے (صرف اس شرط کے ساتھ کہ محوروں کی سمتیں گردش نہیں کرتیں) اجزائے ترکیبی $\bar{\text{ع}}$، $\bar{\text{و}}$، $\bar{\text{ط}}$ رکھتی ہے۔ اب ذرہ ک_1 کی رفتار دو رفتاروں کا مرکب ہے، ایک ذرہ کی وہ رفتار ہے جو نظام کے مرکز ثقل کے لحاظ سے ہے اور جس کے اجزائے ترکیبی ع_1، و_1، ط_1 ہیں اور دوسری مرکز ثقل کی رفتار ہے جس کے اجزائے ترکیبی $\bar{\text{ع}}$، $\bar{\text{و}}$، $\bar{\text{ط}}$ ہیں۔ اس لیے ذرہ ک_1 کی کل رفتار کے اجزائے ترکیبی حسب ذیل ہیں:

$$\bar{\text{ع}} + \text{ع}_1 \text{، } \bar{\text{و}} + \text{و}_1 \text{، } \bar{\text{ط}} + \text{ط}_1$$

پس پہلے ذرہ کی توانائی بالحرکت

$$\frac{1}{2}\text{ک}_1 \left[(\bar{\text{ع}} + \text{ع}_1)^2 + (\bar{\text{و}} + \text{و}_1)^2 + (\bar{\text{ط}} + \text{ط}_1)^2 \right]$$

ہے اور اس لیے نظام کی توانائی بالحرکت

$$\frac{1}{2}\sum \text{ک} \left[(\bar{\text{ع}} + \text{ع}_1)^2 + (\bar{\text{و}} + \text{و}_1)^2 + (\bar{\text{ط}} + \text{ط})^2 \right]$$

ہے یا مربعوں کو پھیلانے سے

$$\frac{1}{2}(\sum \text{ک})(\bar{\text{ع}}^2 + \bar{\text{و}}^2 + \bar{\text{ط}}^2)$$

$$+ \bar{\text{ع}} \sum \text{ک ع} + \bar{\text{و}} \sum \text{ک و} + \bar{\text{ط}} \sum \text{ک ط}$$

$$+ \frac{1}{2} \sum \text{ک} (\text{ع}^2 + \text{و}^2 + \text{ط}^2) \qquad (80)$$

چونکہ مرکز ثقل کو مبداء کے طور پر لیا گیا ہے اور ذروں کے محدود

لا، ما، ی، وغیرہ ہیں اس لیے مساوات (۸) سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{۰} = \frac{\sum \text{ک لا}}{\sum \text{ک}} \text{، وغیرہ} \quad (\text{۲۳۱})$$

اور اس لئے $\sum$ ک لا = ۰۔ پس $\sum$ ک $\frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}}$ = ۰ یا $\sum$ ک ع = ۰۔ اسی طرح $\sum$ ک و = ۰ اور $\sum$ ک ط = ۰۔ اس طرح جملہ (۸۰) کی دوسری سطر پوری کی پوری معدوم ہوتی ہے اور توانائی بالحرکت کے لئے جملہ حاصل ہوتا ہے

$$\frac{1}{2}(\sum \text{ک})(\bar{\text{ع}}^2 + \bar{\text{و}}^2 + \bar{\text{ط}}^2) + \frac{1}{2}\sum \text{ک}(\text{ع}^2 + \text{و}^2 + \text{ط}^2)$$

(۸۱) ....

جس سے مسئلہ ثابت ہے۔

۱۸۷ — اس کے بعد فرض کرو کہ مرکز ثقل کے محدد ثابت محوروں کے ایک خیالی جٹ کے حوالے سے کسی آن $\bar{\text{لا}}$، $\bar{\text{ما}}$، $\bar{\text{ی}}$ ہیں اور مرکز ثقل کی رفتار کے اجزائے ترکیبی حسب سابق $\bar{\text{ع}}$، $\bar{\text{و}}$، $\bar{\text{ط}}$ ہیں۔

ہم فرض کر چکے ہیں کہ مرکز ثقل کے لحاظ سے ذرہ ک, کے محدد لا، ما، ی, ہیں اور رفتار کے اجزائے ترکیبی ع, و, ط, ہیں۔ اس لیے خیالی ثابت محوروں کے حوالے سے ذرہ ک, کے محدد

$$\bar{\text{لا}} + \text{لا}_1\text{، } \bar{\text{ما}} + \text{ما}_1\text{، } \bar{\text{ی}} + \text{ی}_1$$

ہوں گے اور اس کی رفتار کے اجزائے ترکیبی حسب سابق

$$\bar{\text{ع}} + \text{ع}_1\text{، } \bar{\text{و}} + \text{و}_1\text{، } \bar{\text{ط}} + \text{ط}_1$$

ہوں گے۔

فرض کرو کہ ذرہ ک, پر عمل کرنے والی قوت کے اجزائے ترکیبی لا, ما, ی, ہیں۔ دفعہ ۱۴۱ کی بموجب اس ذرہ پر بیرونی قوتیں جو کام کرتی ہیں وہ اس منفی کام کے مساوی ہے جو ذرہ ان قوتوں کے خلاف انجام دیتا ہے۔ پس جب ذرہ اپنے راستے کے کسی چھوٹے عنصر کو طے کرتا ہے تو اس پر جو کام انجام پاتا ہے

وہ حسب دفعہ ۱۱۸

لا، فر(لاَ + لا،) + ما، فر(ماَ + ما،) + ے، فر(یَ + ی،)

کے مساوی ہے۔ اس لئے کسی چھوٹے ہٹاؤ میں وہ کام جو تمام ذروں پر ہوتا ہے

Σ [لا، فر(لاَ + لا،) + ما، فر(ماَ + ما،) + ے، فر(یَ + ی،)]

ہے اور اس کو حسب ذیل طریقے پر دو حصوں میں جدا کیا جا سکتا ہے:

(۲۳۲)

پہلے حصہ کو

Σ لا، فر لاَ + Σ ما، فر ماَ + Σ ے، فر یَ (۸۲)

لے سکتے ہیں اور دوسرا حصہ حسب ذیل ہے

Σ لا، فر لا، + Σ ما، فر ما، + Σ ے، فر ی، (۸۳)

مساوات (۷۷) سے حاصل ہوتا ہے

$$\Sigma \text{ لا،} = \text{ک} \frac{\text{فر ع}}{\text{فر ت}}$$

جہاں ک نظام کی کُل کمیت ہے اور یہ فرض کر لیا گیا ہے کہ اس کا مرکز ثقل حرکت کرتا ہے گویا کہ وہ کمیت ک کا ایک ذرہ ہے جس پر ایک قوت عمل کرتی ہے جس کے اجزائے ترکیبی Σ لا، Σ ما، Σ ے، ہیں۔ یہ فوراً واضح ہوتا ہے کہ جملہ (۸۲) اُس کام کو تعبیر کرتا ہے جو اس خیالی ذرہ کی حرکت میں انجام پاتا ہے اور ہم جانتے ہیں کہ یہ کام اس کی توانائی بالحرکت کے اضافے کے مساوی ہونا چاہئے۔

کُل کام جملوں (۸۲) اور (۸۳) کا مجموعہ ہے۔ یہ کُل کام نظام کی کُل توانائی بالحرکت میں اضافے کے مساوی ہے (بموجب دفعہ ۱۴۰) اور نیز وہ پھر (بموجب دفعہ ۱۸۶) ذروں کے مرکز ثقل کے لحاظ سے حرکت کی

توانائی بالحرکت اور کمیت ک کے خیالی ذرہ کی توانائی بالحرکت کے اضافے کے مجموعہ کے مساوی ہے جبکہ خیالی ذرہ کو مرکز ثقل کے ساتھ حرکت کرتا ہوا خیال کیا جائے۔

یہ آخری اضافہ جیسا کہ ہم دیکھ چکے ہیں جملہ (۸۲) سے تعبیر ہوتا ہے اور اس لیے قبل الذکر (۸۳) سے تعبیر ہونا چاہیے۔

اِس طرح مرکز ثقل کے لحاظ سے توانائی بالحرکت میں اضافہ

Σ (لا۱ فرلا۱ + ما۱ فرما۱ + ہے۱ فری۱)

ہے اور اس لیے اُس کام کے مساوی ہے جو قوتیں کرتی ہیں جبکہ اُس کو اس طور محسوب کیا گیا ہو گویا کہ مرکز ثقل ساکن ہے۔

۱۸۸ — اِس مسئلہ میں کہ توانائی بالقوہ کا اضافہ انجام پائے ہوئے کام کے مساوی ہے یہ جائز ہے کہ توانائی بالقوہ اور انجام پائے ہوئے کام دونوں کو صرف مرکز ثقل کے لحاظ سے حرکت پر غور کر کے محسوب کیا جائے یعنی نظام پر اِس طریقہ سے بحث کی جا سکتی ہے گویا کہ مرکز ثقل ساکن ہے۔

(۲۳۲)

تمثیلاً اُس مسئلہ پر غور کرو جس میں ایک گولی کو متحرک جہاز پر سے فائر کیا گیا ہے۔ گولی کی کمیت جہاز کی کمیت کے مقابلہ میں خفیف ہونے کی وجہ سے ہم فرض کر سکتے ہیں کہ گولی اور جہاز کے مرکز ثقل کی حرکت ٹھیک وہی ہے جو جہاز کی ہے۔ اِس مرکز ثقل کے لحاظ سے گولی کی رفتار کو صرف وہ رفتار فرض کیا جا سکتا ہے جو بلحاظ عرشہ کے ہے۔ گولی کو نالی سے خارج کرنے میں بارود جو کام کرتی ہے وہ وہی ہے گویا کہ جہاز ساکن ہے اور اس لیے جہاز کے لحاظ سے گولی کی رفتار وہی ہوگی گویا کہ جہاز ساکن ہے۔

مثالیں

۱۔ ایک گاڑی رفتار و کے ساتھ حرکت کر رہی ہے اور گاڑی پر سے ایک شخص ریت کو گاڑی کی پشت کی جانب ک پونڈ فی منٹ کی شرح سے افقاً پھینکتا ہے

اور ریت کی رفتار سڑک کے لحاظ سے و ہے۔ کس شرح سے آدمی کام کر رہا ہے؟

۲۔ ایک توپ، گولے کو انتصاباً اوپر ارتفاع ف تک فائر کرسکتی ہے، اسکو ایک مُسلح گاڑی پر جو رفتار و سے دوڑ رہی ہے رکھا گیا ہے۔ بڑے سے بڑا ٹپہ معلوم کرو جہاں تک گولہ پہنچ سکتا ہے (ا) گاڑی کے پیچھے، (ب) گاڑی کے سامنے۔

۳۔ مثال ماسبق میں راستہ سے قریب ترین وہ نقطہ معلوم کرو جو توپ کی زد سے باہر ہے۔

۴۔ کمیت ک کا ایک خول رفتار و کے ساتھ حرکت کر رہا ہے۔ اندرونی دھماکے سے توانائی کی مقدار ن پیدا ہوتی ہے اور خول کو دو کمیتوں میں توڑ دیتی ہے جن میں سے ایک کمیت دوسری کا ک گُنا ہے۔ ثابت کرو کہ اگر ٹکڑے اسُی خط میں حرکت کرنا جاری رکھیں جس میں خول حرکت کر رہا تھا تو اِن کی رفتاریں حسب ذیل ہوں گی:

$$\text{و} + \sqrt{\text{۲ک ن / ک}} \;،\; \text{و} - \sqrt{\text{۲ن / ک ک}}$$

۵۔ دو آدمی جن میں سے ہر ایک کی کمیت ک ہے دو غیر لچکدار تختوں پر کھڑے رہتے ہیں، ہر تختہ کی کمیت ک ہے اور وہ ایک چکنی چرخی پر سے لٹک رہے ہیں۔ اِن میں سے ایک آدمی زمین سے کود کر اپنے مرکزِ ثقل کو ارتفاع ف تک اونچا لیجا سکتا ہے۔ ثابت کرو کہ اگر وہ تختہ سے اسُی توانائی کے ساتھ اُچکے تو اِس کا مرکزِ ثقل، ارتفاع $\text{ف}\left(۱ - \frac{\text{ک}}{(\text{ک}+\text{ک})^{۲}}\right)$ تک بلند ہو گا۔

دھکے والی قوتیں

۱۸۹۔ حرکیاتی مسائل میں بہت سی ایسی صورتیں پیش ہوتی ہیں جنمیں قوت کا عمل وقت کے اسقدر خفیف وقفہ میں شروع اور ختم ہوتا ہے کہ اِس عمل کو فوری یا آنی سمجھا جا سکتا ہے۔ ایسی قوتوں کو دھکے والی قوتیں

کہتے ہیں۔ دھکے والی قوتوں کی مثالیں وہ قوتیں لیجا سکتی ہیں جو نا امتداد پذیر تاگے کو جھٹکا دینے میں یا دو سخت اجسام کے درمیان ٹکر ہونے میں بہ عمل آتی ہیں۔

(۳۳۴) دھکے والی قوت کے عمل سے معیار حرکت میں جو تبدیلی پیدا ہوتی ہے اُس کی مقدار بالعموم محدود ہوتی ہے۔ چونکہ قوت صرف ایک صغیر وقت میں عمل کرتی ہے اِس لیے معیار حرکت کی تبدیلی کی شرح لا انتہا بڑی ہونی چاہیئے۔ حرکت کے دوسرے قانون کی رو سے معیار حرکت کی تبدیلی کی شرح اُس قوت کے مساوی ہے جو عمل کرتی ہے اور اس لیے خود قوت کو جب تک کہ وہ عمل کرتی رہتی ہے لا انتہا بڑی ہونا چاہیئے۔ اِس لیے دھکے والی قوت کو ایک لا متناہی قوت سمجھا جا سکتا ہے جو صغیر وقت کے لیے عمل کرتی ہے۔

۱۹۰ — دھکے والی قوتوں کے مطالعہ کی ابتدا ہی میں اِن قوتوں کی ایک طبیعی خصوصیت کا مشاہدہ کرنا مناسب ہوگا۔ کامل طور پر استوار جسم کی تعریف یہ کی گئی تھی کہ وہ ایسا جسم ہے جو کسی قوتوں کے زیر عمل خواہ وہ کتنی ہی بڑی ہوں اپنی شکل قائم رکھتا ہے۔ اس کے ساتھ ہی یہ بھی ظاہر کر دیا گیا تھا کہ کوئی کامل طور پر استوار جسم کائنات میں موجود نہیں ہے۔ پس بہت بڑی یا لا متناہی قوتوں مثلاً دھکے والی قوتوں کے زیر عمل کسی جسم کو کامل استوار نہیں سمجھا جا سکتا۔

اِس کا نتیجہ یہ ہے کہ جب کوئی دھکے والی قوتیں عمل میں آتی ہیں تو مختلف چھوٹے ذروں کے درمیان جن سے مسلسل اجسام ترکیب یافتہ ہوتے ہیں اضافی حرکت شروع ہوتی ہے۔ یہ اضافی حرکت اُس قسم کی توانائی رکھتی ہے جو حیلی اعمال کے ذریعہ نظام سے واپس وصول نہیں کیجا سکتی۔ فی الحقیقت اِن ذروں کی اضافی حرکت صرف جسم کی حرارت کو تعبیر کرتی ہے چونکہ یہ توانائی نظام سے حیلی کام کے طور پر واپس کو وصول نہیں کی جا سکتی اِس لیے ہم دیکھتے ہیں کہ دھکے والی قوتوں کو جو یہ توانائی پیدا کرنے کا

کام انجام دیتی ہیں بقائی قوتیں نہیں خیال کیا جا سکتا۔ اس طرح ہمیں معلوم ہوتا ہے کہ

کسی نظام کی توانائی بالقوہ اور توانائی بالحرکت کا مجموعہ دھکے والی قوتوں کے عمل میں مستقل نہیں رہتا۔

کیونکہ صریحاً دھکوں کے بعد توانائی کا ایک حصہ حرارت کی شکل میں رہ جاتا ہے۔

مثلاً سیسے کی ایک گولی پر غور کرو جو ایک فولادی نشانے پر ضرب لگاتی ہے۔ فرض کرو کہ نشانے پر ضرب پڑنے سے پیشتر گولی ارتفاع ف پر افقی رفتار و سے حرکت کر رہی تھی۔ اس کی توانائی بالحرکت $\frac{1}{2}$ ک و^2 ہے اور اس کی توانائی بالقوہ ک ج ف۔ ضرب کے بعد ہم فرض کر سکتے ہیں کہ گولی افقی رفتار نہیں رکھتی اور نشانے کے انتصاباً نیچے گر جاتی ہے۔ جس آن گولی گرنے لگتی ہے اس وقت توانائی بالحرکت صفر ہے لیکن توانائی بالقوہ ک ج ف ہے جیسا کہ ضرب سے پیشتر تھی۔ اس طرح کل توانائی میں سے توانائی $\frac{1}{2}$ ک و^2 غائب ہو چکی ہے۔ یہ توانائی گولی اور نشانے کے ذروں میں باہمد گر حرکتیں پیدا کرنے میں استعمال ہوئی ہے، اور انکا اظہار حرارت کی شکل میں اور نیز غالباً اجسام کی شکلوں کی مستقل تبدیلیوں میں۔ نشانے میں گڑھا یا گولی کا چپٹا ہو جانا ہوتا ہے۔

(۲۳۵)

دھکے کی پیمائش

۱۹۱۔ دھکے والی قوت، معیار حرکت میں جو تبدیلی پیدا کرتی ہے اس کو قوت کا **دھکہ** کہتے ہیں۔ اس طرح اگر دھکہ **د**، کمیت ک پر عمل کرے اور اس کی رفتار کو (یا دھکے کی سمت میں رفتار کے جزو ترکیبی کو) ع سے و میں بدل دے تو

$$د = ک (و - ع) \quad (۸۴)$$

حرکت کے دوسرے قانون کی رو سے کسی لمحہ پر عمل کرنے والی قوت،

اُس ذرہ کے معیار حرکت میں تبدیلی کی شرح کے مساوی ہوتی ہے جس پر وہ عمل کرتی ہے۔ اگر قوت کی مقدار مستقل ہے تو معیار حرکت کی کل تبدیلی قوت اور اُس وقت کے حاصل ضرب کے مساوی ہے جس میں وہ عمل کرتی رہتی ہے۔ لیکن اگر قوت کی مقدار متغیر ہے تو معیار حرکت کی تبدیلی قوت کے تکملہ کے مساوی ہو گی جو بلحاظ وقت کے جس میں قوت عمل کرتی رہتی ہے لیا گیا ہو۔ پس اگر کُل وقت ت کے کسی لمحہ پر قوت کی قیمت ف ہو تو ہم دیکھتے ہیں کہ دھکہ

= ف ت، اگر قوت کی مقدار مستقل ہو

لیکن = $\int^{ت}$ ف فر ت، اگر قوت کی مقدار متغیر ہو۔

دھکہ کا کام

۱۹۲۔ کمیت ک کی رفتار کو ع سے و میں تبدیل کرنے میں دھکہ د سے جو کام انجام پاتا ہے وہ

$$\frac{1}{2}\text{ک و}^2 - \frac{1}{2}\text{ک ع}^2$$

کے مساوی ہے یعنے کمیت کی توانائی بالحرکت میں جو اضافہ ہوا ہے اُس کے مساوی ہے۔ اب چونکہ

$$\text{د} = \text{ک}\,(\text{و} - \text{ع})$$

اس لئے اِس کام کے جملے کو شکل

$$\frac{1}{2}\text{ک}\,(\text{و} - \text{ع})\,(\text{و} + \text{ع})$$

$$= \text{د}\left(\frac{\text{و} + \text{ع}}{2}\right)$$

میں لکھا جا سکتا ہے۔

اس لئے دھکہ کا کام، زیر عمل کمیت کی ابتدائی اور آخری

رفتاروں کے اوسط اور دھکے کے حاصل ضرب کے مساوی ہوتا ہے
اگر کمیت دھکے کے خط عمل کی سمت میں حرکت نہیں کر رہی ہے تو (۲۳۶)
مذکورۂ بالا نتیجہ صریحاً درست ہوگا اگر ع، و کو دھکے کے خط عمل کی سمت میں
رفتاروں کے اجزائے ترکیبی سمجھا جائے۔

توضیحی امثلہ

۱۔ ۱۴ پونڈ کا ایک گولہ، ۲۰۰ پونڈ کمیت کے ایک نشانہ پر جو زنجیروں کے ذریعہ لٹکا ہوا ہے، فائر کیا گیا ہے، نشانہ حرکت کی ابتدا افقاً کرنے میں آزاد ہے۔ اگر گولہ ٹکرانے سے پیشتر ۱۰۰۰ فٹ فی ثانیہ کی افقی رفتار سے حرکت کر رہا تھا اور ٹکرانے کے بعد نشانے میں دھنسا ہوا رہ جائے، تو ٹکر کی وجہ سے توانائی کا نقصان معلوم کرو۔

فرض کرو کہ ٹکر کے بعد نشانہ اور گولہ باہم و فٹ فی ثانیہ کی افقی رفتار سے حرکت کی ابتدا کرتے ہیں۔ لہذا معیار حرکت کے بقاء کے اصول سے ٹکر سے پیشتر کے معیار حرکت کو ٹکر کے بعد کے معیار حرکت کے مساوی رکھنے سے حاصل ہوتا ہے

$$۱۰۰۰ \times ۱۴ = ۲۱۴ \times و$$

$$و = \frac{۱۴۰۰۰}{۲۱۴}$$

ٹکر سے قبل توانائی بالحرکت $\frac{1}{2} \times ۱۴ \times (۱۰۰۰)^2$ تھی اور بعد $\frac{1}{2} \times ۲۱۴ \times و^2$۔ اس لئے توانائی کا نقصان ہے

$\frac{1}{2}(۱۴۰۰۰۰۰۰ - ۲۱۴ و^2) = ۶۵۴۰۰۰۰$ فٹ پونڈل، تقریباً

۲۔ ایک بھاری زنجیر جس کا طول ل ہے اور فی اکائی طول کمیت

ک ہے ایک میز کے کنارے پر اس طرح پکڑی گئی ہے کہ اس کا طول ط کنارے پر سے نیچے لٹک رہا ہے اور باقی حصہ میز کے انتہائی کنارے پر گول لپٹا پڑا ہے۔ اگر زنجیر کو آزاد چھوڑ دیا جائے تو حرکت کی کسی منزل پر رفتار معلوم کرو۔

فرض کرو کہ حرکت کی کسی منزل پر زنجیر کا طول لا انتصاباً لٹک رہا ہے اور اس طرح طول ل - لا میز پر گول لپٹا ہوا ہے۔ صغیر وقت فرت کے بعد فرض کرو کہ زنجیر کا جو حصہ لا لٹک رہا ہے وہ لا سے لا + فرلا میں بڑھ جاتا ہے۔ اس لیے اگر زنجیر کی نیچے وار رفتار و ہو تو صریحاً

$$و = \frac{فرلا}{فرت}$$

وقفہ فرت کی ابتدا میں زنجیر کا نیچے وار معیار حرکت وہ تھا جو رفتار و سے حرکت کرنے والی کمیت ک لا کا ہے۔ اس لیے وہ ک و لا تھا۔ اس وقفہ کے ختم پر معیار حرکت وہ ہے جو کمیت ک (لا + فرلا) کا ہے جو اس رفتار سے حرکت کرتا ہے جس کو (و + فرو) سے تعبیر کیا جا سکتا ہے۔ پس معیار حرکت میں اضافہ

ک (لا + فرلا) (و + فرو) - ک لا و

ہے یا دوسرے رتبہ کی چھوٹی مقدار فرو فرلا کو نظر انداز کر دیا جائے تو یہ اضافہ

ک (لا فرو + و فرلا)

ہے۔

لیکن معیار حرکت کا اضافہ فی اکائی وقت مساوات (۱۷) کی رو سے عمل کرنے والی کل قوت کے مساوی ہوتا ہے اور یہ قوت وقفہ فرت کی ابتدا میں ک ج لا ہے اور ختم پر ک ج (لا + فرلا) اس لیے دوسرے رتبہ کی چھوٹی مقدار فرلا فرت کو نظر انداز کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ وقفہ فرت میں معیار حرکت میں اضافہ ک ج لا فرت ہونا چاہیئے۔ (۲۳۷)

اس لیے

$$\text{ک}\,(\text{لا فرو} + \text{و فرلا}) = \text{ک ج لا فرت}$$

$$= \text{ک ج لا}\,\frac{\text{فرلا}}{\text{و}}$$

یا

$$\text{ولا}\,\frac{\text{فرو}}{\text{فرلا}} + \text{و}^{2} = \text{ج لا}$$

اِس مساوات کو تکمل کرنے کے لیے ہم ۲ لا سے ضرب دیتے ہیں تو حاصل ہوتا ہے

$$\text{و}^{2}\,\text{لا}^{2} = \frac{2}{3}\,\text{ج لا}^{3} + \text{مستقل}$$

مستقل کا تعیّن کرنے کے لیے ہم دیکھتے ہیں کہ جب لا = ط تو و = ۰ اور اِس لیے مستقل کی قیمت $-\frac{2}{3}\,\text{ج ط}^{3}$ ہونی چاہیے۔ اس طرح

$$\text{و}^{2} = \frac{2}{3}\,\text{ج}\,\frac{\text{لا}^{3} - \text{ط}^{3}}{\text{لا}^{2}}$$

اِس مساوات سے وہ رفتار معلوم ہوتی ہے جبکہ طول لا میز پر سے انتصاباً لٹک رہا ہو۔ جب زنجیر کا آخری ذرہ کھنچ جاتا ہے تو لا کی قیمت ل ہے اور اِس لیے اِس لمحہ پر

$$\text{و}^{2} = \frac{2}{3}\,\text{ج}\,\frac{\text{ل}^{3} - \text{ط}^{3}}{\text{ل}^{2}}$$

ہم دیکھتے ہیں کہ و^{2} کی یہ قیمت وہ قیمت نہیں ہے جو توانائی کی مساوات سے حاصل ہوگی۔ صریحاً یہاں اِس مساوات کو استعمال نہیں کرنا چاہیے کیونکہ دھکے پورے وقت میں عمل کرتے ہیں اور زنجیر کے نئے ذروں کو جھٹکے کے ساتھ حرکت میں لاتے ہیں۔

مثالیں

۱۔ ۱۰ ٹن وزن کا ایک خالی ریلوے ڈبہ ایک چھوٹے ڈبے سے جس پر ۵۰ ٹن کوئلہ لدا ہے ٹکراتا ہے اور دونوں باہم ۵ فٹ فی ثانیہ کی رفتار سے

حرکت کرتے ہیں۔ پہلے ڈبہ کی رفتار ابتداً کیا تھی اور ڈبوں کے درمیان دھکے کی مقدار کیا ہے۔

۲۔ $\frac{1}{4}$ اونس وزن کا ایک پتھر ۵ فٹ ارتفاع سے نرم زمین پر چھوڑا گیا ہے۔ پتھر کے ساکن ہونے سے پیشتر عمل کرنے والے دھکے کی مقدار معلوم کرو۔

۳۔ ایک ٹن کی کمیت، ۱۶ فٹ کے ارتفاع سے ایک انتصابی میخ پر گرتی ہے اور اس کو زمین میں نصف انچ زیادہ دھنسا دیتی ہے۔ یہ تسلیم کر کے کہ میخ پر کمیت کی قوت عاملہ اثنائے عمل میں مستقل رہتی ہے اس کی مقدار اور عمل کا وقفہ معلوم کرو۔

۴۔ ۱۰ گرام کمیت کا ایک جسم ۸ سینٹی میٹر فی ثانیہ کی رفتار سے حرکت کر رہا ہے۔ دفعتاً اس پر ایک ضرب پڑتی ہے جس کی وجہ سے اس کی رفتار دگنی ہو جاتی ہے اور اس کی حرکت کی سمت بقدر نصف زاویہ قائمہ کے تبدیل ہو جاتی ہے۔ ضرب کی سمت معلوم کرو اور وہ رفتار معلوم کرو جس سے جسم حرکت کرتا اگر وہ ضرب سے پیشتر ساکن ہوتا۔

(۲۳۸)

۵۔ ایٹوڈ کی مشین کی ڈوری سے اس کے سروں پر کمیتیں ک$_1$، ک$_2$ بندھی ہیں جن میں ک$_1$ زیادہ بھاری ہے۔ ڈوری کے ایک ثانیہ تک حرکت میں رہنے کے بعد کمیت ک$_1$ فرش سے ٹکراتی ہے۔ معلوم کرو (ا) کمیت ک$_2$ کتنی دیر تک چڑھنا جاری رکھے گی، (ب) کمیت ک$_1$ پھر کس رفتار سے حرکت میں آئے گی جبکہ ڈوری تن جائے۔

۶۔ کسی خاص دن ایک انچ بارش ۱ گھنٹوں میں ہوئی جبکہ قطرے ۲۰ فٹ فی ثانیہ کی رفتار سے گرے۔ ایک ڈیرے کی چھت پر جو دبیز کپڑے سے بنا ہے اوسط دباؤ فی مربع فٹ معلوم کرو جو بارش کے قطروں کے تصادم سے پیدا ہوا تھا، یہ فرض کر لیا گیا ہے کہ چھت افقی ہے۔ (پانی کے ایک مکعب فٹ کا وزن $\frac{1}{2}$ ۶۲ پونڈ ہے)۔

۷۔ زمین جو اپنے مدار میں رفتار و سے حرکت کر رہی ہے چھوٹے شہابوں کے ایک گروہ سے متصادم ہوتی ہے جس کی کثافت فی مکعب میل

ایک کیلوگرام ہے اور جو رفتار و سے ٹھیک اُس سمت کے خلاف حرکت کر رہے ہیں جو زمین کی حرکت کی ہے۔ شہابوں کے تصادم کی وجہ سے زمین کی رفتار میں تخفیف کی شرح معلوم کرو اور نیز زمین کی سطح پر کے مختلف نقطوں پر باریمایہ کے ارتفاع میں اضافہ معلوم کرو، یہ فرض کر لیا گیا ہے کہ تمام شہاب زمین کی سطح پر پہنچنے سے قبل گرد میں تبدیل ہو جاتے ہیں۔ (زمین کی کمیت ۶ × ۱۰^۲۷ گرام ہے اور اس کا قطر ۷،۹۲۷ میل ہے)

۸۔ ایک یکساں زنجیر ایک افقی سُتوی پر ڈھیر کی شکل میں گول لپٹی پڑی ہے اور ایک شخص اس کا ایک سرا ہاتھ میں لیکر اس کو رفتار و سے یکساں طور پر اوپر اٹھاتا ہے۔ ثابت کرو کہ جب اُس کا ہاتھ سُتوی سے ارتفاع لا پر ہوتا ہے تو اس کے ہاتھ پر دباؤ زنجیر کے لا + و²/ج طول کے وزن کے مساوی ہے۔

لچک

۱۹۳۔ یہ عام تجربہ کی بات ہے کہ اگر ہم فولاد کے ایک گولے کو سخت فرش پر گرائیں تو وہ کچھ ارتفاع تک بازگشت کرے گا لیکن اگر لکڑی کے گولے کو گرائیں تو وہ اس سے بہت کم ارتفاع تک بازگشت کرے گا اور روئی، کاغذ یا چکنی مٹی کا گولہ تو بازگشت ہی نہ کرے گا۔

جب دو جسموں کی سطحوں کے درمیان تماس ایسی نوعیت کا ہو کہ تصادم کے بعد وہ بالکل بازگشت ہی نہیں کرتے تو ہم کہتے ہیں کہ تماس کامل طور پر بے لچک ہے لیکن اگر جسم بازگشت کریں تو ہم کہتے ہیں کہ تماس لچکدار ہے۔ صریحاً لچک کے مختلف درجے ہوتے ہیں۔

بڑے سے بڑے لچکاؤ کا لمحہ

۱۹۴۔ تصادم کی سب سے زیادہ معروف مثال جس میں لچک بہت بڑی ہوتی ہے غالباً بلیرڈ کے دو گولوں کے تصادم سے بہم پہنچتی ہے۔ ہم

اِس تصادم پر بہترین طریقے سے بحث کر سکیں گے اگر دوسرے گولے کی حرکت کا حوالہ ایک ایسے حوالے کے فریم سے دیا جائے جو پہلے گولے کے ساتھ حرکت کرے۔ تصادم سے قبل دوسرے گولے کا مرکز پہلے گولے کے مرکز کے قریب آ رہا ہے اور تصادم کے بعد اُس سے پَرے ہٹ رہا ہے۔ اِس لیے اثنائے تصادم میں کسی لمحہ پر اِس کی حرکت قریب آنے کی حرکت سے پَرے ہٹنے کی حرکت میں تبدیل ہو جانی چاہیئے، اِس لمحہ پر گولوں کے مرکزوں کے درمیان فاصلہ اقل تھا۔ (۲۳۹)

فرض کرو کہ تجربہ کرنے سے پیشتر ہم نے گولوں کے اُن دو رخوں پر سفیدی لگا دی ہے جن پر تصادم واقع ہوتا ہے۔ تصادم کے بعد گولوں کا امتحان کرنے سے معلوم ہوگا کہ سفیدی میں خلل پڑ گیا ہے نہ صرف ایک واحد نقطہ پر بلکہ ایک پورے دائرہ پر جو کافی بڑا ہے۔ اگر گولے اچھی رفتار سے حرکت کر رہے ہوں تو اِس دائرہ کا قطر نصف انچ بھی ہو سکتا ہے۔ اِس سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ اُس لمحہ پر جس پر گولوں کے مرکز ایک دوسرے سے قریب ترین تھے اُن کا درمیانی فاصلہ اُس فاصلہ سے کم تھا جو ان کے درمیان ہوتا اگر گولے سکون کی حالت میں ایک دوسرے کو مس کرتے ہوے رکھے جاتے۔ یعنے اثنائے تصادم میں گولے پچک گئے تھے۔

وہ لمحہ جس پر مرکز قریب ترین ہوتے ہیں بڑے سے بڑے پچکاؤ کا لمحہ کہلاتا ہے۔

بالعموم جب کوئی دو سطحیں تصادم میں ہوتی ہیں تو وہ لمحہ جس پر مشترک عماد کی سمت میں اضافی رفتار معدوم ہوتی ہے بڑے سے بڑے پچکاؤ کا لمحہ کہلاتا ہے۔ صریحًا یہ وہ لمحہ ہے جس پر اِن دو سطحوں کی حرکت قریب آنے کی حرکت سے پرے ہٹنے کی حرکت میں تبدیل ہوتی ہے۔

۱۶۵ — بڑے سے بڑے پچکاؤ کے لمحہ پر پہنچنے سے پہلے بالعموم دونوں اجسام کی رفتاریں تبدیل ہو چکتی ہیں اور اِس لیے اِس تبدیلی کے پیدا کرنے میں

قوتیں بہ عمل ہونی چاہئیں۔ اِن قوتوں کے عمل کا پورا وقت (یعنے اُس لمحہ سے جس پر اجسام ابتداً مس کرتے ہیں اُس لمحہ تک جس پر بڑے سے بڑا پچکاؤ واقع ہوتا ہے) اس قدر کم ہوتا ہے کہ اِن کو دھکے والی قوتیں سمجھا جا سکتا ہے۔ اِن دو جسموں پر عمل کرنے والے دھکے، عمل اور تعامل ہونے کی وجہ سے مساوی اور مخالف ہونے چاہئیں۔ اگر سطحیں چکنی ہیں تو اِن دھکوں کی سمت مشترک عماد کی سمت ہونی چاہئے۔ اگر سطحیں کھردری ہیں تو ہم سمت کی تخصیص نہیں کر سکتے جب تک کہ ایک دوسرے پر سطحوں کی پھسلن کی سمت معلوم نہ ہو۔ ہر صورت میں فرض کرو کہ مشترک عماد کی سمت میں دھکے کا جزوِ ترکیبی د سے تعبیر ہوتا ہے۔ مقدار د کو پچکاؤ کا دھکہ کہتے ہیں۔ صریحاً یہ مقدار اُن قوتوں کو تعبیر کرتی ہے جن سے دھکہ ترکیب پاتا ہے اور جو اضافی عمادی رفتار کو صفر میں تحویل کرتی ہیں۔

(۲۴۰) بڑے سے بڑے پچکاؤ کے لمحہ کے بعد قوتوں کا ایک دوسرا انتظام بہ عمل آنا چاہئے تاکہ وہ رفتاریں پیدا ہوں جن سے اجسام ایک دوسرے سے جدا ہوتے ہیں۔ فی الحقیقت بڑے سے بڑے پچکاؤ کے لمحہ پر اجسام کے پچکے ہوئے حصے کسی ہوئی کمانی کے مانند عمل کرتے ہیں اور ہم فرض کر سکتے ہیں کہ افتراق کی رفتاریں اِس خیالی کمانی کے عمل سے پیدا ہوئی ہیں۔ یہ قوتیں بھی جو جسموں کو جدا کرتی ہیں دھکے والی قوتیں سمجھی جا سکتی ہیں اور مشترک عماد کی سمت میں اِس دھکے کے جزوِ ترکیبی کو دَ سے تعبیر کیا جا سکتا ہے۔ دھکے دَ کو عود کا دھکہ کہتے ہیں۔

۱۹۶ — جب تصادم سے قبل اجسام کی حرکت معلوم ہوتی ہے تو ہم معیار حرکت کے بقا کا اصول استعمال کر کے بڑے سے بڑے پچکاؤ کے لمحہ پر رفتاریں معلوم کر سکتے ہیں۔ اس لئے پچکاؤ کے دھکہ د کو محسوب کرنا ممکن ہے۔

برخلاف اس کے دھکہ دَ کی مقدار متصادم اجسام کے تماس کی نوعیت پر منحصر ہوتی ہے، اگر اجسام کامل طور پر بے لچک ہیں تو تصادم کے بعد افتراق

نہیں ہوگا اور اس لیے دَ = ۰ ۔ تجربہ کی بنا پر بالعموم یہ معلوم ہوا ہے کہ دھکہ دَ اور دھکہ د میں حسب ذیل سادہ ربط ہے :

دَ = چ د

جہاں چ ایک مقدار ہے جو صرف دو متصادم سطحوں کے تماس کی نوعیت پر منحصر ہے اور دھکہ د کی مقدار پر منحصر نہیں ہے ۔ مقدار چ کو ان دو اجسام کی لچک کی قدر کہتے ہیں ۔

یہاں اس بات کو اچھی طرح سمجھ لینا ضروری ہے کہ لچک کی یہ قدر وہ مقدار ہے جو اُن قدروں یا لچک کے مستقلات سے بالکل مختلف ہے جو لچکدار اجسام کے نظریہ میں واقع ہوتے ہیں ۔ واقعہ یہ ہے کہ اصطلاح لچک کی قدر جن معنوں میں مقدار چ کو تعبیر کرنے کے لیے یہاں مستعمل ہوئی ہے وہ نامناسب ہے کیونکہ اس سے جس چیز کی پیمائش ہوتی ہے اس کو لچک کی بجائے **بازگشتگی** کہنا زیادہ مناسب ہے اور بلاشبہ لچک کی قدر کی بجائے بازگشتگی کی قدر کہنا زیادہ ٹھیک ہے ۔ لیکن بالعموم اصطلاح لچک کی قدر استعمال کی جاتی ہے ۔

۱۹۷ ۔ ہم دیکھ چکے ہیں کہ چ کی قیمت کامل طور پر بے لچک اجسام کے لیے صفر ہے ۔ لوہا سیسے سے ٹکرائے تو چ کی قیمت تقریباً ۱۳ء ہے، لوہا لوہے سے ٹکرائے تو اس کی قیمت ۶۶ء ہے اور سیسا سیسے سے ٹکرائے تو ۲۰ء ۔ ہم دیکھتے ہیں کہ بازگشتگی دو اجسام کے درمیانی تماس کی نوعیت پر منحصر ہوتی ہے اور اس لحاظ سے رگڑ کی قدر کے مشابہ ہے ۔ بازگشتگی کچھ ایک جسم سے اور کچھ دوسرے جسم سے پیدا نہیں ہوتی کیونکہ اگر ایسا ہوتا تو چ کی قیمت جبکہ لوہا سیسے سے ٹکرائے اُن قیمتوں کے درمیان ہوتی جو لوہا لوہے سے اور سیسا سیسے سے ٹکرانے میں حاصل ہوتی ہیں ۔

اُن اجسام کی مثالیں جن کے لیے لچک کی قدر بڑی ہے حسب ذیل معلوم ہوئی ہیں، ہاتھی دانت کے دو گولے جب متصادم ہوتے ہیں تو چ کی قیمت تقریباً ۸۱ء ہے اور شیشا شیشے سے متصادم ہوتا ہے تو چ کی قیمت ۹۴ء ہے ۔ سب سے زیادہ کامل لچک جو تصور کی جاسکتی ہے

اُن دو اجسام کی ہے جن کے لیے چ = ۱، اِس صورت میں عود کا دھکہ پچکاؤ کے دھکے کے مساوی ہوگا۔ ایسے اجسام کو کامل طور پر لچکدار کہا جاتا ہے۔ کامل طور پر لچکدار اجسام کی یہ خصوصیت ہے کہ تصادم سے کسی توانائی کا نقصان نہیں ہوتا۔ یہ ظاہر ہے کہ چ کی قیمت اکائی سے تجاوز نہیں کر سکتی کیونکہ اگر اِس کی قیمت اکائی سے متجاوز ہو تو عود کے دھکے سے جو توانائی بالحرکت ظہور پذیر ہوگی وہ اُس توانائی سے زیادہ ہوگی جو پچکاؤ کا دھکہ جذب کرتا ہے اور اِس لیے مجموعی توانائی بڑھ جائے گی جو ناممکن ہے۔

اب ہم اِن اصولوں کو تصادم کی چند اہم صورتوں پر استعمال کریں گے۔

ذرہ جو ایک ثابت سطح سے ٹکرائے

راست تصادم

۱۹۸۔ اول فرض کرو کہ تصادم راست ہے یعنے ٹکر کے لمحہ پر ذرہ سطح کے اُس نقطہ کے عماد پر حرکت کر رہا ہے جس پر وہ آکر ٹکراتا ہے۔ فرض کرو کہ اِس کی کمیت ک ہے اور تصادم سے قبل اِس کی رفتار و ہے۔ بڑے سے بڑے پچکاؤ کے لمحہ پر ذرہ سُتوی کے لحاظ سے ساکن ہوگا اور اِس لیے اِس کا معیار حرکت پچکاؤ کے دھکے کی وجہ سے ک و سے صفر میں تحویل ہوگا۔ اِس لیے

د = ک و

اگر لچک کی قدر چ ہے تو

دَ = چ د = چ ک و

(۲۴۲) اِس طرح مقدار چ ک و کا ایک عمادی دھکہ ظہور پذیر ہوگا اور اِس کی وجہ سے ذرہ میں رفتار چ و پیدا ہوگی۔ کوئی مماسی دھکہ موجود نہیں ہے کیونکہ سطحیں ایک دوسرے پر نہیں پھسلتیں۔ پس رفتارِ بازگشت سطح کے

عماد کی سمت میں چ و ہے۔

مائل تصادم - چکنا تماس

۱۹۹ - اگر تصادم مائل ہے تو فرض کرو کہ تصادم سے قبل مماس مستوی اور عماد کی سمتوں میں رفتار کے اجزائے ترکیبی ع، و ہیں - حسب سابق

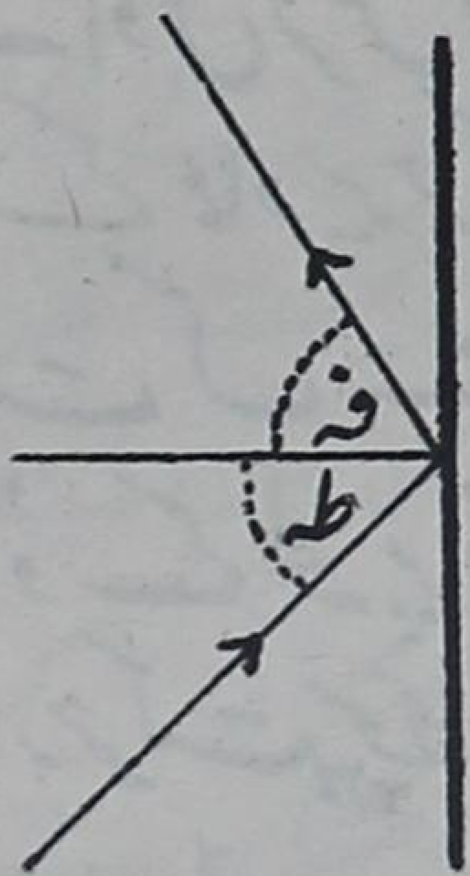
د = ک و ، دَ = چ ک و

اِس لیے تصادم کے بعد عماد کی سمت میں رفتار (فرض کرو وَ)

وَ = چ و

ہے -

اگر تماس کو چکنا فرض کیا جائے تو مماس مستوی میں کوئی قوت نہیں ہو سکتی اور اس لیے مماس مستوی میں معیار حرکت غیر متغیر رہتا ہے۔ اِس طرح مماس مستوی میں رفتار ع کے مساوی رہتی ہے اور اِس لیے تصادم کے بعد رفتار وہ ہو گی جس کے اجزائے ترکیبی ع، چ و ہیں۔ فرض کرو کہ طہ وہ زاویہ ہے جو رفتار تصادم سے پیشتر عماد کے ساتھ بناتی ہے اور فرض کرو کہ تصادم کے بعد متناظر زاویہ فہ ہے - تب



مس طہ = $\frac{ع}{و}$

مس فہ = $\frac{ع}{چ و}$

شکل (۱۲۶)

اسلیے مس طہ = چ مس فہ

اگر اجسام کامل طور پر لچکدار ہیں تو چ = ۱ اور اس لیے طہ = فہ یعنی ذرہ ایسے زاویہ پر بازگشت کرتا ہے جو زاویہ وقوع کے مساوی ہے۔ اِس کا انعکاس اُسی قانون کے تحت ہوتا ہے جو نور کی کرن کا ہے -

اگر اجسام کامل لچکدار نہیں ہیں تو طہ < فہ اور اس لیے بازگشت کا

راستہ عماد سے زیادہ ہٹا ہوا ہوگا۔

اگر اجسام کامل طور پر بے لچک ہیں تو چ = ۰ اور اس لیے فہ = $\frac{\pi}{۲}$، ذرہ مُستوی پر صرف پھسلیگا اور صریحاً ایسا ہی ہونا چاہیے کیونکہ د' = ۰

تصادم سے قبل توانائی بالحرکت

$$\frac{1}{2}\,\text{ک}\,(\text{ع}^2 + \text{و}^2) \qquad (۲۴۳)$$

ہے اور تصادم کے بعد

$$\frac{1}{2}\,\text{ک}\,(\text{ع}'^2 + \text{و}'^2)$$

ہے۔ اِس لیے توانائی بالحرکت میں نقصان کی مقدار

$$\frac{1}{2}\,\text{ک}\,(\text{و}^2 - \text{و}'^2)$$

ہے یعنے

$$\frac{1}{2}\,\text{ک}\,\text{و}^2\,(1 - \text{چ}^2)$$

یہ نقصان معدوم ہوگا اگر اجسام کامل طور پر لچکدار ہوں یعنے چ = ۱۔ باقی تمام صورتوں میں توانائی کا نقصان ضروری ہے۔ نیز ہم دیکھتے ہیں کہ چ اکائی سے بڑا نہیں ہو سکتا ورنہ اجسام کو ایک دوسرے سے ٹکرا کے توانائی میں اضافہ کرنا ممکن ہوتا۔

مائل تصادم۔ کھُردا تماس

۲۰۰ — چکنے تماس کی صورت کی طرح ہمیں ربط د' = چ و حاصل ہوتا ہے جو عماد کی سمت میں رفتار کے اجزائے ترکیبی کو مربوط کرتا ہے۔ لیکن تعامل کلاً عماد کی سمت میں عمل نہیں کرتا اور اس لیے اب یہ کہنا درست نہیں ہے کہ رفتار کا مماسی جزو ترکیبی غیر متغیر رہتا ہے۔

فرض کرو کہ ہم اُس صورت پر غور کرتے ہیں جس میں ذرہ کی سطح ثابت سطح پر اُس پورے وقفہ میں جس میں یہ دو سطحیں ایک دوسرے کو مس کرتی ہیں ایک ہی سمت میں پھسلتی ہے۔ تب تصادم کے ہر لمحہ پر ایک مماسی قوت ہوگی جو عمادی قوت کے مہ گنا کے مساوی ہوگی اور اِس لیے کل مماسی دھکہ عمادی دھکے کے مہ گنا کے مساوی ہونا چاہیے اور اِسلیے مہ (د + د') کے مساوی۔

اِس لیے اگر تصادم کے بعد مماسی رفتار عَ ہے تو

ک (ع - عَ) = مہ (دَ + د)

= مہ (۱ + چ) د

= مہ (۱ + چ) ک و

اس طرح عَ = ع - (۱ + چ) مہ و

(۲۴۴) حسب سابق اگر ہم فرض کریں کہ ذرہ کا راستہ تصادم سے قبل اور اِس کے بعد عماد کے ساتھ زاویے طہ، فہ بناتا ہے (دیکھو شکل ۱۲۶) تو

مس طہ = ع / و

مس فہ = عَ / وَ = (ع - (۱ + چ) مہ و) / چ و

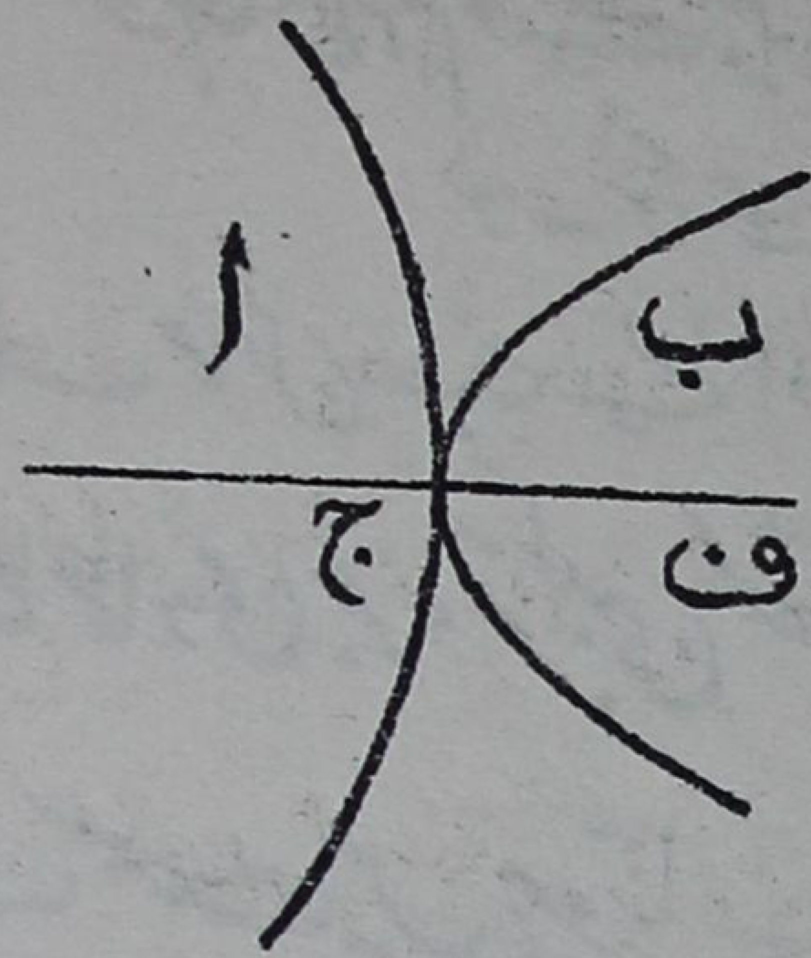
اِس لیے چ مس فہ = مس طہ - (۱ + چ) مہ

(۱ + چ) مہ کی قیمت ہمیشہ مثبت ہوگی اور اِس لیے فہ ہمیشہ اُس قیمت سے کم ہوگا جو مستوی کے چکنے ہونے کی صورت میں حاصل ہوتی ہے، دوسرے الفاظ میں مستوی کا کھُردراپن ذرہ کو عماد سے قریب تر بازگشت کرانے کا موجب ہوتا ہے۔

لیکن یہ مساوات صرف بعض حدود کے اندر درست رہتی ہے کیونکہ ہم نے یہ مان لیا ہے کہ تصادم کے پورے وقفہ میں پھسلن واقع ہوتی ہے۔ یہ ہوسکتا ہے کہ حرکت کی کسی خاص منزل پر پھسلن موقوف ہو اور ذرہ لُڑھکنا شروع کرے اور اگر ایسا ہو تو محصلہ بالا مساوات جائز نہیں ہوگی۔

دو متحرک اجسام کا تصادم

۲۰۱ — فرض کرو کہ کمیتوں ک، کَ کے دو جسم ا، ب، نقطہ ج پر تصادم ہوتے ہیں اور ج پر مشترک عماد ج ف ہے۔ فرض کرو کہ تصادم کے



شکل (۱۲۷)

لمحہ پر اِن اجسام کے مراکزِ ثقل دونوں خطِ ج ف پر واقع ہیں اور فرض کرو کہ کمیتوں ا، ب کے مراکزِ ثقل کی رفتاروں کے اجزائے ترکیبی عماد ج ف کی سمت میں

ع، عَ تصادم سے قبل

و، وَ بڑے سے بڑے پچکاؤ کے لمحہ پر

اور و، وَ تصادم کے بعد

ہیں۔ اب اگر پچکاؤ کے دھکے کو د سے تعبیر کیا جائے اور عود کے دھکے کو دَ سے تو

د = ک (ع - و) = - کَ (عَ - و)　　(۸۵)

دَ = ک (و - و) = - کَ (و - وَ)　　(۸۶)

پہلی مساوات سے

ع = و + د/ک ،

عَ = و - د/کَ

اِس لیے　　ع - عَ = د (1/ک + 1/کَ)

یہ مساوات تصادم سے پیشتر جو اضافی رفتار ہے اُس کو د سے مربوط کرتی ہے۔

اسی طرح مساواتوں (۸۶) سے

و - وَ = - دَ (1/ک + 1/کَ)

یہاں ہم دیکھتے ہیں کہ تجربی ربط دَ = چ د ، ربط

و - وَ = - چ (ع - عَ)

کے ٹھیک مماثل ہے یعنی الفاظ میں : تصادم کے بعد مراکز ثقل کی اضافی رفتار کا عمادی جزو ترکیبی، تصادم سے قبل اضافی رفتار کا چ گنا اور اسکی مخالف سمت میں ہوتا ہے۔

اس قانون کو نیوٹن کا تجربی قانون کہتے ہیں، اس سے مادہ کی وہی خاصیت بیان ہوتی ہے جو ربط دَ = چ د سے ظاہر ہے۔

ایک اور رشتہ جو تصادم سے قبل اور اس کے بعد کی رفتاروں کو مربوط کرتا ہے معیار حرکت کے بقا کے اصول سے حاصل ہوتا ہے چنانچہ

ک و + کَ وَ = ک ع + کَ عَ

اس کو مساوات (۸۷) کے ساتھ ملانے سے ہم تصادم کے بعد کی رفتاروں و، وَ کو تصادم سے قبل کی رفتاروں ع، عَ کی رقوم میں معلوم کرسکتے ہیں۔

ان مساواتوں کو حل کرنے سے معلوم ہوگا کہ

و = (ک ع + کَ عَ - چ کَ (ع - عَ)) ÷ (ک + کَ) (۸۸)

وَ = (ک ع + کَ عَ + چ ک (ع - عَ)) ÷ (ک + کَ) (۸۹)

ان سے عمادی رفتاریں حاصل ہوں گی۔

اگر اجسام کھردرے ہیں تو ہم مماسی رفتاروں کو اسی طریقے سے معلوم کرتے ہیں جو دفعہ ۲۰۰ میں بیان کیا جا چکا ہے، لیکن اگر اجسام چکنے ہیں تو ج ف کی عمود دار سمتوں میں رفتاریں غیر متغیر رہتی ہیں۔

(۲۱۶) اگر ان دو اجسام کا مرکز ثقل ساکن ہو یا اگر ہم تمام رفتاروں کو مرکز ثقل کے لحاظ سے پیمائش کریں جس کا مطلب بھی وہی ہے تو

ک ع + کَ عَ = ۔

اس لیے و = ـ چ (کَ (ع ـ عَ)) / (ک + کَ)

وَ = چ (ک (ع ـ عَ)) / (ک + کَ)

ربط ک ع = ـ کَ عَ کو استعمال کرنے سے یہ مساواتیں ہو جاتی ہیں

و = ـ چ ع،

وَ = ـ چ عَ

اور اس لیے اجسام ایک دوسرے سے باز گشت کرتے ہیں گویا کہ وہ لچک چ کے ایک ثابت مستوی پر متصادم ہوئے تھے۔

توانائی بالحرکت، تصادم سے قبل یا بعد، دو توانائیوں کے مجموعہ کے مساوی ہوگی (۱) اس واحد ذرہ کی توانائی بالحرکت جو مرکز ثقل کے ساتھ حرکت کر رہا ہے (۲) نظام کی توانائی بالحرکت بلحاظ مرکز ثقل کے۔ اول الذکر توانائی تصادم سے غیر متغیر رہتی ہے اور اس لیے تصادم کی وجہ سے کل توانائی بالحرکت میں جو نقصان واقع ہوتا ہے وہ اس توانائی کے نقصان کے مساوی ہے جو مرکز ثقل کے لحاظ سے ہے۔

اگر اجسام چکنے ہیں تو توانائی بالحرکت کا یہ نقصان

= ۱/۲ (ک ع۲ + کَ عَ۲ ـ ک و۲ ـ کَ وَ۲)

= ۱/۲ (ک ع۲ + کَ عَ۲) (۱ ـ چ۲)

اس طرح توانائی بالحرکت کا نقصان، مرکز ثقل کے لحاظ سے ابتدائی توانائی بالحرکت کے (۱ ـ چ۲) گنے کے مساوی ہے۔ اگر اجسام کامل طور پر لچکدار ہیں تو چ = ۱ اور اس لیے توانائی میں کوئی نقصان واقع نہیں ہوتا۔ لیکن اگر چ = ۰ تو مرکز ثقل کے لحاظ سے ابتدائی توانائی پوری کی پوری نقصان میں آجاتی ہے۔

دو چکنے کروں کا تصادم

۲۰۲ — فرض کرو کہ تصادم کے بعد دو چکنے کروں کی حرکت معلوم کرنے میں ہم اوپر کے اصولوں کو استعمال کرتے ہیں۔

فرض کرو کہ تصادم کے لمحہ پر کروں کے مرکز ثقل ا، ب ہیں اور اس لیے خط ا ب، تصادم کے نقطہ ج پر سطحوں کا مشترک عماد ہے۔

(۲۴۷

حسب سابق فرض کرو کہ تصادم سے قبل ا ب پر رفتاریں ع، عَ ہیں اور ان دونوں کو سمت ا ب میں پیمائش کیا گیا ہے اور فرض کرو کہ تصادم کے بعد اسی سمت میں رفتاریں و، وَ ہیں۔ تب معیار حرکت کے بقا کی رو سے ا ب پر

ک ع + کَ عَ = ک و + کَ وَ

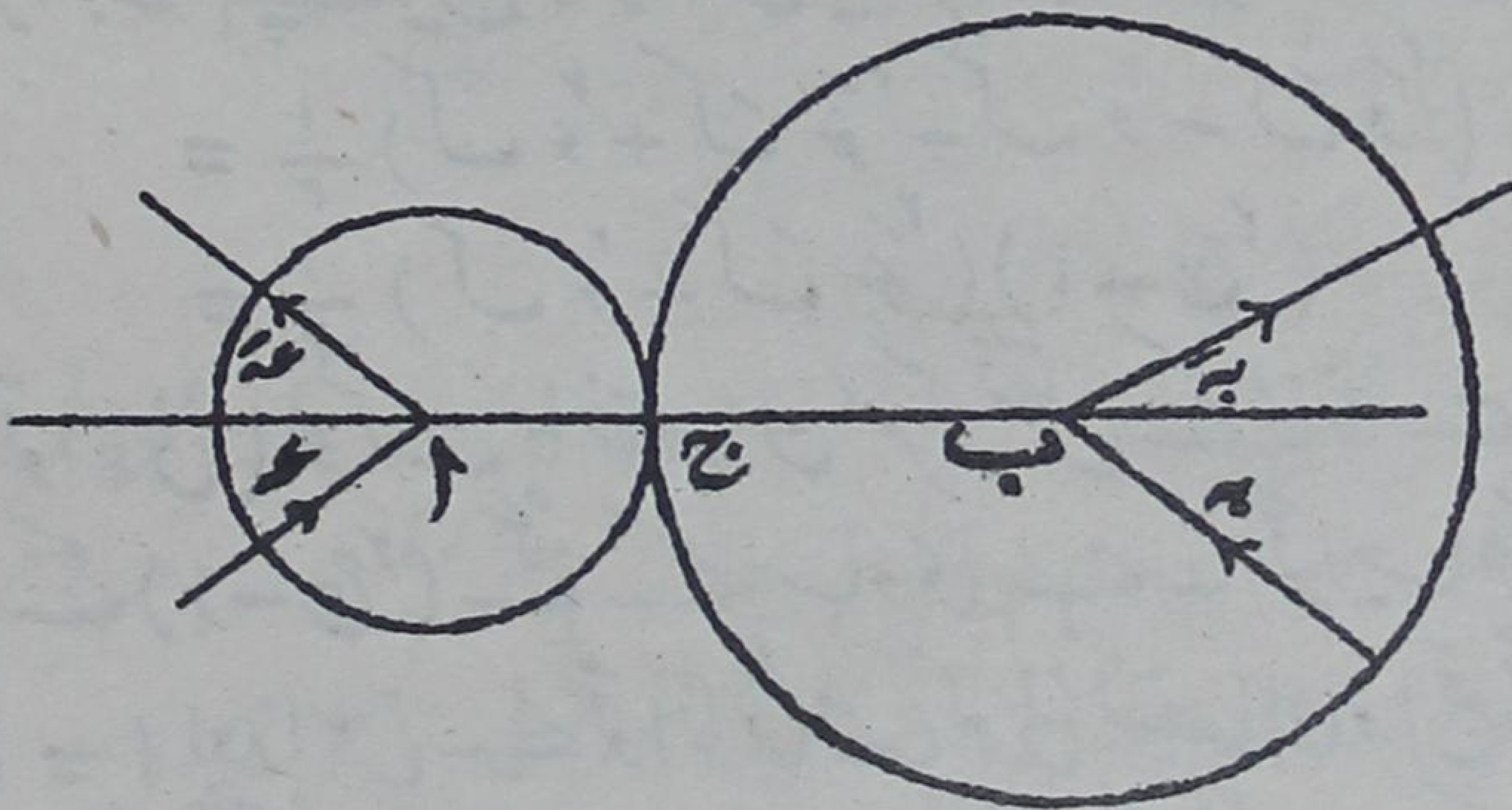
اور نیوٹن کے قانون سے و - وَ = چ (ع - عَ)

ان سے مساواتیں (۸۸) اور (۸۹) حسب سابق حاصل ہوتی ہیں۔

اگر تصادم سے قبل اور بعد ا کی رفتاریں ا ب کے ساتھ زاوئے عہ، عہَ بناتی ہیں (حسب شکل) تو تصادم سے قبل اور بعد مماسی رفتاریں

ع مس عہ، و مس عہَ

ہیں۔ لیکن چونکہ مماسی رفتاریں غیر متغیر رہتی ہیں اس لیے



شکل (۱۲۸)

و مس عَہ = - ع مس عہ

اسی طرح ب کی حرکت سے

وَ مس بَہ = - عَ مس بہ

اس لیے مساواتیں (۸۸) اور (۸۹) ہو جاتی ہیں

مم عَہ = - (ک ع + کَ عَ - ج کَ (ع - عَ)) / ((ک + کَ) ع) مم عہ،

مم بَہ = - (ک ع + کَ عَ + ج ک (ع - عَ)) / ((ک + کَ) عَ) مم بہ

اور اِن سے عَہ، بَہ ابتدائی حرکت کی رقوم میں معلوم ہوتے ہیں۔

(۲۴۸) اگر کُرے مساوی کمیت کے ہوں اور دوسرا کرہ ابتداً ساکن ہو جیسے کہ بلیرڈ کے کھیل میں ہوتا ہے تو ک = کَ، عَ = ۔ اور اس لیے

مم عَہ = - ½ (۱ - ج) مم عہ، بَہ = ۔

اِس طرح ب، مرکزوں کے خط پر حرکت کی ابتداء کرتا ہے اور صریحاً ایسا ہی ہونا چاہئے کیونکہ وہ قوتیں جو اس کو حرکت میں لاتی ہیں اِس خط پر عمل کرتی ہیں۔

چونکہ ج ہمیشہ اکائی سے کم ہوتا ہے اور عہ ضرور حادہ ہے اس لیے مم عَہ منفی ہونا چاہئے اور اِس لیے عَہ منفرجہ ہوگا۔ اگر ج = ۱ تو عَہ = ۹۰° چنانچہ اگر کُرے کامل چکنے اور کامل لچکدار ہوں تو تصادم کے بعد کرہ ا مرکزوں کے خط کے علی القوائم حرکت کرے گا، اِس کی حرکت وہی ہوگی جو ہوتی اگر وہ کامل چکنے اور بے لچک مستوی سے ٹکراتا۔

توضیحی مثال

ایک کھُردرے میز پر چند مشابہ سکّوں کو مساوی فاصلوں پہ ایک خطِ مستقیم میں رکھا گیا ہے۔ پہلے سِکہ کو اِس خط پر

اِس طرح متحرک کیا جاتا ہے کہ وہ دوسرے سکّہ سے راست ٹکرائے۔
حاصل حرکت معلوم کرو۔

فرض کرو کہ دو سکوں۔ کے درمیان تصادم کے لیے لچک کی قدر چ ہے اور سکوں اور میز کے درمیان رگڑ کی قدر مہ ہے۔ فرض کرو کہ ہر سکہ کی کمیت ک ہے اور دو متصلہ سکوں کے قریب ترین نقطوں کے درمیان فاصلہ ف ہے۔
ایک سکہ اور میز کے درمیان عمادی تعامل ک ج ہے اور اس لیے سکہ کی حرکت میں مزاحم رگڑ کی قوت مہ ک ج ہے اور پیدا شدہ ابطاء مہ ج ہے۔ پس اگر ایک سکہ اپنے ابتدائی محل سے رفتار و سے چلے تو اِس کی رفتار دوسرے سکّہ تک پہنچنے میں ع ہو جائے گی جہاں

$$و^2 - ع^2 = ۲ \, مہ \, ج \, ف \qquad (ا)$$

اب ہمارے پاس مساوی کمیت کے دو سکّے ہیں جو رفتاروں ع، ۰ سے ٹکراتے ہیں تصادم کے بعد اِن کی رفتاریں و، وَ حسب ذیل مساواتوں سے حاصل ہوتی ہیں:

$$و - وَ = - چ \, ع \quad (\text{قانون نیوٹن})$$

$$و + وَ = ع \quad (\text{معیار حرکت کا بقا})$$

اِس لیے

$$و = \frac{1}{2} \, ع \, (۱ - چ)$$

$$وَ = \frac{1}{2} \, ع \, (۱ + چ)$$

تصادم کے بعد وہ سکہ جو ابتداً حرکت میں تھا رفتار و حاصل کرتا ہے اور رگڑ کی قوت سے اِس میں ابطاء مہ ج پیدا ہوتا ہے۔ اِس لیے وہ ساکن ہو جائے گا اگر وہ اِس اثناء میں فاصلہ س طے کرنے کے بعد پھر نہ ٹکرائے جہاں س، مساوات

$$و^2 = ۲ \, مہ \, ج \, س$$

یا

$$س = \frac{و^2}{۲ \, مہ \, ج} = \frac{ع^2 (۱ - چ)^2}{۸ \, مہ \, ج} \qquad (ب)$$

(۲۴۹)

سے حاصل ہوگا۔ وہ سکہ جو تصادم کی وجہ سے حرکت میں آیا ہے رفتار

$$وَ = \frac{1}{2} ع (1 + چ) \quad (ج)$$

سے حرکت کی ابتدا کرتا ہے۔ اس سے پہلے کا سکہ رفتار و سے حرکت کی ابتدا کیا تھا۔ یہ رفتار مساوات (ا) سے حاصل ہوتی ہے۔ اب مساواتوں (ا) اور (ج) سے ع کو ساقط کیا جائے تو ابتداً حرکت میں آنے کی متواتر رفتاروں کے درمیان رشتہ

$$وَ^2 = ۲ مہ ج ف + \frac{۴ وَ^2}{(1 + چ)^2} \quad (د)$$

حاصل ہوتا ہے۔ یہ ربط مستقل سروں والی فرق کی مساوات ہے۔

اگر چ = ۱ تو ہم مساوات (ب) سے دیکھتے ہیں کہ س = ۰ اور اس لیے ہر سکہ اپنے سامنے کے سکہ سے ٹکرانے کے بعد مطلقاً ساکن ہو جاتا ہے، وہ اپنا پورا معیار حرکت اُس سکہ میں منتقل کر دیتا ہے۔ نیز مساوات (ا) سے

$$وَ^2 - وَ^2 = ۲ مہ ج ف$$

جب ن سکوں کے درمیان معیار حرکت منتقل ہو چکتا ہے تو رفتار کے مربع کی قیمت بقدر ۲ ن مہ ج ف کے گھٹ جاتی ہے۔ اس طرح کسی نقطہ پر متحرک سکہ کی رفتار وہ رفتار ہوتی ہے جو ایسے سکہ کی ہوتی جو رفتار و سے حرکت کی ابتدا کرتا اور وہ فاصلہ طے کرتا جو اُن سکوں کے درمیانی تمام وقفوں کے مجموعے کے مساوی ہے جن پر سے حرکت منتقل ہوئی ہے۔

اگر ف = ۰ یعنے اگر سکے ابتداً ایک دوسرے کو مس کر رہے ہوں تو

$$وَ = \frac{۲ و}{1 + چ}$$

پس اگر ن سکے ہیں تو ن واں سکہ رفتار

$$و \left(\frac{1 + چ}{۲}\right)^{ن-1}$$

سے حرکت کی ابتدا کرے گا۔

مثالیں

۱۔ اولے ایک منجمد تالاب کی سطح پر ایسی سمت میں ٹکراتے مشاہدہ کئے گئے ہیں جو انتصابی کے ساتھ °۳۰ کا زاویہ بناتی ہے اور وہ ٹکرانے کے بعد °۶۰ کے زاویہ پر بازگشت ہوتے ہیں۔ تماس کو چکنا تسلیم کر کے لچک کی قدر معلوم کرو۔

۲۔ اگر مثال ماسبق کے اولے تصادم کے بعد ۲ فٹ کے ارتفاع تک اچھلیں تو وہ رفتار معلوم کرو جس سے وہ ابتداً زمین سے ٹکرائے تھے۔

۳۔ مثال ماسبق میں وہ ارتفاع معلوم کرو جہاں تک اولے برف پر سے دوسری بار بازگشت کرنے میں اچھلیں گے۔

۴۔ ایک گولے کو ایک افقی فرش پر گرایا گیا ہے جو دو مرتبہ بازگشت کرنے کے بعد ایک ایسے ارتفاع تک اچھلتا ہے جو اس ارتفاع کا نصف ہے جہاں سے وہ گرایا گیا تھا۔ لچک کی قدر معلوم کرو۔

۵۔ ایک گولی ایک کھردرے نشانہ پر °۴۵ کے زاویہ پر ٹکراتی ہے اور اسی زاویہ پر بازگشت ہوتی ہے۔ ثابت کرو کہ

$$مہ = \frac{۱ - چ}{۱ + چ}$$

۶۔ ایک گولہ جس کو فاصلہ ا سے سر کیا گیا ہے ایک نشانہ سے زاویہ قائمہ پر ٹکراتا ہے اور بازگشت کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ وہ نشانہ سے فاصلہ ا چ پر گرے گا (ہوا کی مزاحمت نظر انداز کرو)۔

۷۔ کمیت ک کا ایک کرہ کمیت کَ کے ایک ساکن کرہ سے ٹکراتا ہے ان کے درمیان تماس چکنا ہے اور تصادم کے بعد ان کے راستے ایک دوسرے کے علی القوائم مشاہدہ کئے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ ک = چ کَ۔

۸۔ بلیرڈ کے دو گولے ایک دوسرے کو مس کرتے ہیں اور ساکن ہیں، ایک تیسرا گولہ ایک ساتھ ان سے ٹکراتا ہے اور تصادم کے بعد ساکن

ہو جاتا ہے۔ ثابت کرو کہ چ = $\frac{۲}{۳}$

۹ــ ایک چکنے افقی مستوی پر کے ایک نقطہ سے ایک ذرہ کو رفتار و کے ساتھ ارتفاع عہ پر پھینکا گیا ہے اور یہ ذرہ مستوی سے ٹکرانے کے بعد مستوی پر متعدد مرتبہ بازگشت کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ اس کی پرواز کا کل وقت $\frac{۲\ و\ جب\ عہ}{ج\ (۱-چ)}$ ہے اور اس کا کل ٹپہ $\frac{و^۲\ جب\ ۲\ عہ}{ج\ (۱-چ)}$ ہے۔

۱۰ــ ایک کھلاڑی ایک دیوار سے افقی فاصلہ ف پر کھڑا ہے اور وہ ایک گولے کو دیوار کی جانب افقی سے میلان عہ پر پھینکتا ہے۔ ثابت کرو کہ اگر گولہ بازگشت کرنے کے بعد کھلاڑی کے پاس واپس ہو تو جس رفتار و سے کھلاڑی نے اسے پھینکا ہے وہ حسب ذیل ہونی چاہیئے :-

$$و^۲ = \frac{(۱+چ)\ ج\ ف}{۲\ چ\ جم\ عہ\ (جب\ عہ - مہ\ جم\ عہ)}$$

جہاں چ اور عہ، لچک اور رگڑ کی قدریں ہیں۔

۱۱ــ مثال ماسبق میں حسب ذیل صورتوں پر غور کرو:

(ا) چ = ۰، (ب) مہ = مس عہ، (ج) مہ > مس عہ

عام مثالیں

۱ــ ایک چکنا فانہ ایک افقی میز پر پھسل سکتا ہے، اس کے رُخ پر ایک ذرہ رکھا گیا ہے۔ معلوم کرو کہ فانے کو کس طرح متحرک کرنا چاہیئے کہ ذرہ نہ اُوپر چڑھے نہ نیچے اُترے۔ نیز ذرے اور فانے کے درمیان دباؤ معلوم کرو۔

۲ــ ریل کا ایک ہموار برقی راستہ ہے جس پر نصف میل کے فاصلوں سے اسٹیشن ہیں۔ اس راستہ پر ۱۰۰ ٹن کی ٹرینوں کو ۱۲ میل فی گھنٹہ کی اوسط رفتار سے چلانا مقصود ہے جس میں ہر اسٹیشن پر نصف منٹ کا قیام بھی شامل ہے۔ ثابت کرو کہ برقی حرّاکے کم از کم مزید ۸ ٹن وزنی ہونے چاہئیں اگر رگڑ کی قدر $\frac{۱}{۳}$ ہو

اور یہ فرض کر لیا گیا ہے کہ ٹرینوں میں مسلسل بریک لگے ہوئے ہیں۔ (انفعالی مزاحمتوں کو نظر انداز کرو)۔

ثابت کرو کہ اس ریلوے کو جاذبہ ارض سے چلایا جا سکتا ہے اگر راستہ اسٹیشنوں کے درمیان تقریباً ۴۶۰۰ فٹ کے نصف قطر تک نیچے وار منحنی ہو اور یہ کہ اسٹیشنوں کے درمیان میلان (Dip) تقریباً ۲۰۰ فٹ، اسٹیشنوں پر ڈھال تقریباً ۲۳ میں ۱ اور اعظم رفتار تقریباً $\frac{1}{2}$ ۲۲ میل فی گھنٹہ۔

۳ — ارتفاع ف اور قطر و کا ایک اسطوانہ ریل کے ایک ڈبہ کے فرش پر استادہ ہے اور ڈبہ دفعتاً اسراع ع کے ساتھ حرکت کرنا شروع کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ اسطوانہ ڈبے کے لحاظ سے صرف اُس وقت ساکن رہے گا جبکہ ع، م ج اور $\frac{و ج}{ف}$ دونوں سے کم ہو۔

۴ — ایک دائری طوق پھینکا گیا ہے جو یکساں گھومتا ہوا غیر منقلب حرکت کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ اس کا مرکز ایک قطع مکافی مرتسم کرے گا اور کور کا تناؤ کور کے طول $\frac{و^2}{ج}$ کے وزن کے مساوی ہوگا جہاں و، طوق کے مرکز کے لحاظ سے کور کی رفتار کو تعبیر کرتا ہے۔

(۲۵۱) ۵ — ۶ فٹ لمبی ایک یکساں زنجیر جس کی کمیت فی فٹ ۲ پونڈ ہے ایک کھردرے افقی میز پر خط مستقیم کی شکل میں پڑی ہے اور اس کا کچھ حصہ میز کے کنارے پر سے نیچے لٹک رہا ہے اور پھسلن عین واقع ہونے کو ہے۔ زنجیر اور میز کے درمیان رگڑ کی قدر $\frac{1}{2}$ ہے۔ اگر ذرا سے خلل سے زنجیر پھسلنے لگے تو میز کے کنارے پر زنجیر کا تناؤ معلوم کرو جبکہ اس کا ۱ فٹ طول پھسل چکے۔

۶ — دو مساوی گولے ا، ب جن میں سے ہر ایک کی کمیت ک ہے ایک دوسرے سے فاصلہ ا پر ہیں۔ ا پر دھکہ د سمت ا ب میں عمل کرتا ہے اور ب پر ایک مستقل قوت ف اسی سمت میں عمل کرتی ہے۔ ثابت کرو کہ ا، ب سے نہ ملیگا اگر

د^2 > ۲ ا ف ، ک

۷ ۔ ایک گولی کا وزن ایک اونس ہے، اس کو ایک درجہ کے ارتفاع پر رفتار ۱۲۰۰ فٹ فی ثانیہ سے فائر کیا گیا ہے، یہ گولی اپنے راستہ کے بلند ترین نقطہ پر ایک پرندے سے جا لگتی ہے جس کا وزن ۲ $\frac{1}{2}$ پونڈ ہے ۔ یہ فرض کر کے کہ جب گولی پرندے پر پڑی تھی تو وہ ساکن تھا اور اس کے بعد پیوست شدہ گولی کے ساتھ نیچے گرا معلوم کرو کہ فائر کرنے کے نقطہ سے کتنی دور پرند گرا ہوگا ۔

۸ ۔ ایک گولی کا وزن و پونڈ ہے، اس کو رفتار ر سے ایک جسم پر فائر کیا گیا ہے جو رفتار ر' سے آگے جا رہا ہے اور جس کا وزن و' ہے ۔ ثابت کرو کہ جسم کی رفتار گولی کی ضرب پڑنے کے بعد

$$\frac{\text{و ر' - و ر}}{\text{و' + و}} \quad \text{یا} \quad \text{ر' - } \frac{\text{و}}{\text{و'}} \text{(ر - ۶)}$$

ہو جائے گی بموجب اس کے کہ گولی جسم میں پیوست ہو جائے یا اس کو چھید کر رفتار ۶ سے حرکت کرے ۔

آزاد شدہ توانائی محسوب کرو اور پھر جسم کی اوسط مزاحمت گولی سے چھدے ہوئے طول کے ذریعہ معلوم کرو ۔

۹ ۔ ایک وزن اوپر سے ایک میخ پر گرتا ہے اور اپنے متواتر دھکوں سے میخ کو زمین میں دھکیلتا جاتا ہے ۔ ہر ضرب پر میخ جس حد تک زمین میں دھنستی ہے وہ کس طرح (ا) وزن کی مقدار پر اور (ب) اس کو جس ارتفاع تک اٹھا کر چھوڑا گیا ہے اس پر منحصر ہوگی ؟

اگر وزن ایک ٹن ہے اور جس ارتفاع سے وہ گرتا ہے وہ ۱۰ فٹ ہے اور میخ زمین میں $\frac{1}{10}$ انچ دھنسے تو مزاحمت (ٹنوں میں) معلوم کرو ۔

۱۰ ۔ ایک بے لچک میخ کی کمیت ک پونڈ ہے اور ایک ہتوڑی جس کی کمیت کَ پونڈ ہے انتصاباً فاصلہ ف میں سے گر کر اس پر ضرب لگاتی ہے اور ہر ضرب پر میخ زمین میں ا فٹ انتصاباً دھنستی ہے ۔ ثابت کرو کہ میخ کو زمین میں بتدریج دھکیلنے کے لیے جو وزن سرے پر رکھنا ہوگا وہ

$$\text{ک} + \frac{\text{ک}^{۲}\,\text{ف}}{(\text{گ} + \text{ک})\,\text{ا}} \ \text{پونڈ}$$

ہے۔

۱۱۔ ایک ہتوڑی کا سِرا و پونڈ ہے، یہ سِرا ر فٹ فی ثانیہ سے حرکت کرکے ایک بے لچک کیلے پر پڑتا ہے جس کا وزن و پونڈ ہے اور وہ ک پونڈ کے ایک حرکت پذیر تختے میں نصب ہے۔ ثابت کرو کہ اگر کیلے کے دھنسنے میں تختے کی اوسط مزاحمت ر پونڈ کی ایک قوت ہو تو ہر ضرب پر کیلا تختے میں

$$\frac{\text{ک}\,\text{و}^{۲}}{(\text{ک} + \text{و} + \text{و})(\text{و} + \text{و})} \; \frac{\text{ر}^{۲}}{۲\,\text{ج}\,\text{ر}} \ \text{فٹ}$$

دھنسیگا۔

(۲۵۲) ۱۲۔ چرخیوں کے اُس نظام میں جس کا بیان دفعہ ۱۲۸ میں کیا گیا ہے ثابت کرو کہ اگر ف ایک وزن ہو جو $\frac{\text{و}}{\text{ن}}$ کے مساوی نہیں ہے تو وزن و میں پیدا شدہ اِسراع

$$\frac{\text{ن}\,\text{ف} - \text{و}}{\text{ن}^{۲}\,\text{ف} + \text{و}} \ \text{ج}$$

ہوگا۔

۱۳۔ دو کمیتیں ک، ک ایک لچکدار ڈوری کے ذریعہ ملحق ہیں اور ایک چکنے افقی میز پر رکھی گئی ہیں، کمیتیں ساکن ہیں اور ڈوری بے تنی ہوئی ہے۔ دھکہ ف کی ایک ضرب پہلی کمیت پر لگائی گئی ہے اُس سمت میں جو دوسری کمیت کی سمت کے مخالف ہے۔ ثابت کرو کہ جب ڈوری پھر بے تنی ہوئی حالت میں ہوتی ہے تو دوسری کمیت کی رفتار

$$\frac{۲\,\text{ف}}{\text{ک} + \text{ک}}$$

ہے۔

۱۴۔ ایک نا امتداد پذیر ڈوری کے سِروں اور وسطی نقطہ پر تین مساوی

ذرے باندھے گئے ہیں اور ڈوری کو پوری طرح تنی ہوئی حالت میں ایک چکنے میز پر رکھا گیا ہے۔ وسطی ذرہ جھٹکے کے ساتھ اُس سمت میں حرکت میں آتا ہے جو دوسرے ذروں کو ملانے والے خط پر عمود ہے۔ توانائی کا نقصان معلوم کرو جب دوسرے ذرے جھٹکے کے ساتھ حرکت میں آتے ہیں۔

۱۵ ۔ کوئلہ لیجانے والی ایک ٹرین میں متعدد مشابہ ڈبے ہیں جن کو ایک انجن کھینچتا ہے جس کا وزن تین ڈبوں کے عین مساوی ہے۔ ٹرین ہموار راستہ پر ساکن ہے اور جوڑک (Couplings) جو مساوی طول کے ہیں سب کے سب برابر ڈھیلے ہیں۔ انجن ایک مستقل جری قوت کے ساتھ حرکت کرنا شروع کرتا ہے اور ہر ڈبہ جھٹکے کے ساتھ حرکت میں آتا ہے جبکہ اسکا جوڑک تن جاتا ہے۔ ثابت کرو کہ انجن کی چال بڑی سے بڑی ہوگی جبکہ دسواں جھٹکہ عین واقع ہونیکو ہو۔

۱۶ ۔ برف ایک چھت پر مساوی طور پر پھیلی ہوئی ہے۔ اگر اِس کی کچھ کمیت پھسلنا شروع کرے اور جاتے ہوئے ایکساں عرض کا راستہ بناتے جائے تو ثابت کرو کہ اِس کا اسراع مستقل ہے اور اُس اسراع کے ایک ثلث کے مساوی ہے جو اُس کمیت کا ہوگا جو آزادانہ چھت کے نیچے پھسلے۔

۱۷ ۔ ایک وزنی اور کامل ملائم یکساں ڈوری انتصاباً لٹک رہی ہے اور اس کا زیریترین نقطہ، ایک بے لچک افقی مستوی کے اوپر ارتفاع ف پر ہے۔ اگر اِس کو مستوی پر گرنے کے لیے دفعتاً چھوڑ دیا جائے تو ثابت کرو کہ جب میز پر ڈوری کا طول لا گر پڑتا ہے تو میز پر دباؤ

(۳ لا + ۲ ف) ک ج

ہے۔

۱۸ ۔ اگر دو مساوی گولے رفتاروں $\frac{۱ + ج}{۱ - ج}$ و اور ۔ و کے ساتھ متصادم ہوں تو ثابت کرو کہ اول الذکر ساکن ہو جائے گا۔

۱۹ ۔ ثابت کرو کہ ایک کرہ کی وہ کمیت ک جو کمیت ک کے ایک ساکن کرہ اور رفتار و سے ٹھیک اِس کی جانب حرکت کرنے والے کمیت ک کے

ایک دوسرے کرہ کے درمیان رکھی رہنی چاہئے تاکہ اول الذکر کرہ تصادم سے بڑی سے بڑی رفتار حاصل کر سکے یہ $\sqrt{کَ گ}$ ہوگی اور حاصل کردہ رفتار

$$\frac{کَ\ و\ (۱ + چ)^{۲}}{گ + کَ + ۲ ک}$$

ہوگی۔

(۲۵۳)

۲۰ — ایک لچکدار گولے کو ایک سخت فرش پر ارتفاع ف فٹ سے انتصاباً گرایا گیا ہے اور گولہ فرش سے جس رفتار سے ٹکراتا ہے ہر دفعہ اُس کی چ گُنی رفتار سے انتصاباً بازگشت کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ گولہ ساکن ہونے سے پیشتر

$$\frac{۱ + چ^{۲}}{۱ - چ^{۲}}\ ف\ فٹ،\ \frac{۱ + چ}{۱ - چ}\sqrt{\frac{۲ ف}{ج}}\ ثانیوں\ میں$$

طے کرے گا۔

ف = ۱، چ = $\frac{۷}{۹}$ کے لیے اِس کا حساب لگاؤ۔

۲۱ — ارتفاع ف کے ایک مینار کی چوٹی سے ایک گولہ گِرایا گیا ہے اور اُسی وقت مساوی وزن کے ایک دوسرے گولے کو رفتار $\sqrt{۲ ج ف}$ کے ساتھ مینار کے قاعدے سے اوپر وار پھینکا گیا ہے جو گرتے ہوئے گولے کے ساتھ راست متصادم ہوتا ہے۔ اگر عود کی قدر چ ہو تو ثابت کرو کہ گرتا ہوا گولہ بازگشت میں ارتفاع ف۔ $\frac{ف}{۴}$ (۱ − چ^{۲}) تک اُچھلے گا۔

۲۲ — ایک لڑکا ریل کے ایک ڈبے کی افقی چھت پر جو پُل کے نیچے سے رفتار ۱۵ میل فی گھنٹہ سے جارہا ہے ایک گولے کو چھوڑتا ہے۔ اگر چھت اور گولے کے درمیان مہ = $\frac{۱}{۲}$، چ = $\frac{۲}{۳}$ تو چھت کے اوپر لڑکے کے ہاتھ کا کم از کم ارتفاع معلوم کرو تاکہ گولے کی دوسری بازگشت چھت کے اُسی نقطہ سے ہو جس سے پہلی بازگشت ہوئی تھی۔

اگر لڑکے کا ہاتھ اِس سے زیادہ ارتفاع پر ہے تو کیا واقع ہوگا۔

۲۳ — ایک کامل طور پر لچکدار ذرہ کو پھینکا گیا ہے، یہ ذرہ ایک گردشی سطح کے اندرونی حصہ سے ٹکراتا ہے، گردشی سطح کا محور ایک معلومہ انتصابی

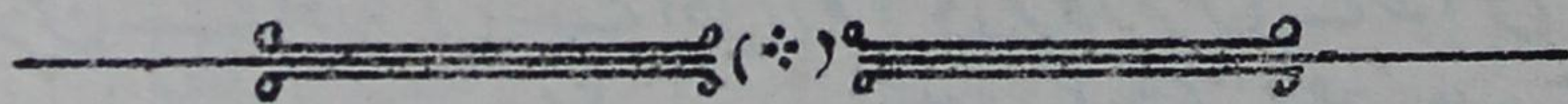
خط ہے ۔ ثابت کرو کہ اُن سب مکافیوں کے راس جو متواتر بازگشتوں سے مرتسم ہوتے ہیں ایک سطح پر واقع ہوتے ہیں جس کی شکل گردشی سطح کی شکل پر منحصر نہیں ہوتی ۔

۲۴ ۔ ثابت کرو کہ قطر ا کے ایک چکنے بلیرڈ گولے کی حرکت کی سمت میں ایک دوسرے ساکن مساوی گولے پر تصادم کے ذریعہ زیادہ سے زیادہ ممکن انحراف پیدا کرنے کے لیے قبل الذکر کو ایک ایسی سمت میں پھینکنا ہوگا جو مرکزوں کو ملانے والے خط (طول ج) کے ساتھ زاویہ

$$\text{جب}^{-1}\left(\frac{1}{\text{ج}}\sqrt{\frac{1-\text{ج}^{2}}{3-\text{ج}^{2}}}\right)$$

بنائے ۔

۲۵ ۔ ایک رقاص اس طرح لٹک رہا ہے کہ اس کا لنگر ایک چکنے انتصابی مُستوی کو عین مس کرتا ہے ۔ لنگر کو ایک جانب کھینچا گیا یہاں تک کہ وہ پہلے کی بہ نسبت ۵ انچ زیادہ بلند ہوا اور پھر اس کو چھوڑ دیا گیا تاکہ مُستوی سے عماد کی سمت میں ٹکرائے، پہلی بازگشت میں وہ انتصاباً ۴ انچ اچھلتا ہے ۔ اگر رقاص کو اُسی زاویہ میں سے ایک جانب کھینچا جائے لیکن اس طور پر کہ لنگر مُستوی سے ایسے زاویے پہ ٹکرائے جو عماد کے ساتھ ۶۰° کا زاویہ بنائے تو بازگشت میں لنگر انتصاباً کتنا اُچھلے گا ۔



(۲۵۴)

دسواں باب

متغیر قوت کے تحت ذرہ کی حرکت

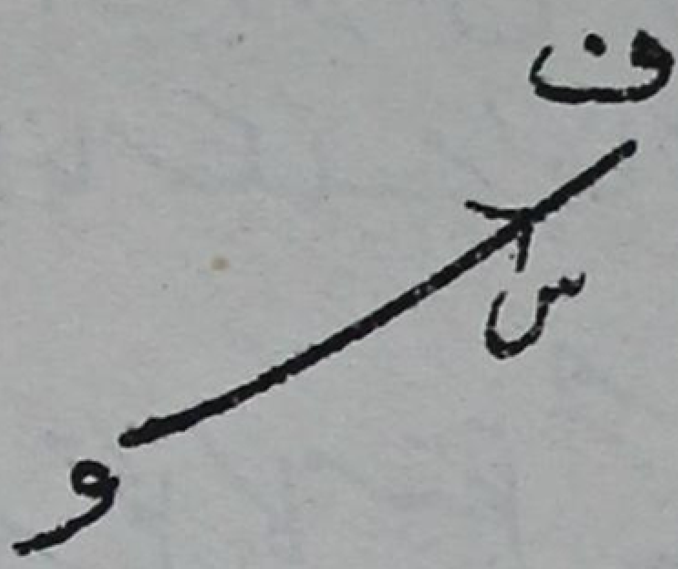
۲۰۳ — ابتک ہم نے ذرہ کی حرکت کی صرف اُن صورتوں پر بحث کی ہے جن میں ذرہ پر عمل کرنے والی قوتیں اس کی حرکت کے پورے راستہ میں مستقل تھیں اور اِس لیے ذرہ کا اسراع مستقل تھا۔ اب ہم ایک ایسے ذرہ کی حرکت پر غور کریں گے جس پر وہ قوتیں عمل کرتی ہیں جو ذرہ کے راستے پر نقطہ بہ نقطہ متغیر ہوتی ہیں۔

اِس قسم کی حرکت کے مسائل دو جماعتوں میں تقسیم کئے جا سکتے ہیں، ایک تو وہ جس میں راستہ جو ذرہ طے کرتا ہے مسئلہ کے معطیات کے طور پر دیا گیا ہو اور دوسری وہ جس میں یہ راستہ نامعلوم ہو۔ اول الذکر جماعت سادہ ترین ہے اور اس لیے اول ہم اسی پر غور کریں گے۔ اِس میں وہ صورتیں شامل ہیں جو نموناً حسب ذیل ہیں: رقاص کی حرکت جس میں رقاص کا لنگر، رقاص کے لٹکانے کی میکانیت کی وجہ سے ایک دائرہ مرتسم کرنے پر مجبور ہے، تار میں پروئے ہوئے منکے کی حرکت جس میں منکا وہ راستہ طے کرنے پر مجبور ہے جو تار سے نشان زدہ ہے۔

حرکت کی مساوات

۲۰۴ — فرض کرو کہ ذرہ اپنے راستہ کا فاصلہ س کسی لمحہ ت پر طے کرتا ہے،

یہ فاصلہ راستہ کے کسی ثابت نقطہ و سے پیمائش کیا جاتا ہے۔ اب راستہ پر ذرہ کی رفتار $\frac{\text{فرس}}{\text{فرت}}$ ہے۔ اِس کو و سے تعبیر کرنے سے ذرہ کا اسراع $\frac{\text{فرو}}{\text{فرت}}$ یا $\frac{\text{فر}^2\text{س}}{\text{فرت}^2}$ حاصل ہوتا ہے۔



شکل (۱۲۹)

اگر عمل کرنے والی قوتیں معلوم ہوں تو بھی ہم اسراع کی قیمت معلوم کر سکتے ہیں۔ چنانچہ اِس کے لیے تمام قوتوں کو جو ذرہ پر عمل کرتی ہیں راستہ کی سمت میں تحلیل کرنا چاہیے۔ اگر اس سمت میں قوت کا جزو ترکیبی س ہے تو حرکت کے دوسرے قانون کی رُو سے ذرہ کی حرکت کی مساوات (۲۵۵)

$$\text{س} = \text{ک}\,\frac{\text{فرو}}{\text{فرت}} \qquad (۹۰)$$

یا

$$\text{س} = \text{ک}\,\frac{\text{فر}^2\text{س}}{\text{فرت}^2} \qquad (۹۱)$$

ہوگی۔

ہم فرض کریں گے کہ قوت کا میدان دائمی ہے اور اِس لیے مقدار س کے متعلق یہ فرض کیا جا سکتا ہے کہ وہ صرف اُسی محل پر منحصر ہوتی ہے جو ذرہ اپنے راستہ پر اختیار کرتا ہے اور اس لمحہ پر منحصر نہیں ہوتی جس پر وہ وہاں پہنچتا ہے۔ بہ الفاظ دیگر س، س کا ایک تفاعل ہے نہ کہ ت کا۔ مساوات (۹۱) س اور ت میں ایک تفرقی مساوات ہے اور اگر ہم اِس کو حل کر سکیں تو ذرہ کی حرکت کا پورا علم ہو جائیگا بشرطیکہ اِس کا راستہ معلوم ہو۔

یہ مساوات دوسرے رتبہ کی تفرقی مساوات ہے لیکن اِس کو آسانی کے ساتھ پہلے رتبہ کی مساوات میں مستحیل کیا جا سکتا ہے۔ کیونکہ

$$\frac{\text{فر}^2\text{س}}{\text{فرت}^2} = \frac{\text{فرو}}{\text{فرت}} = \frac{\text{فرو}}{\text{فرس}}\,\frac{\text{فرس}}{\text{فرت}} = \text{و}\,\frac{\text{فرو}}{\text{فرس}}$$

اس لیے مساوات لکھی جا سکتی ہے :-

$$\text{س} = \text{ک و}\ \frac{\text{فر و}}{\text{فر س}}$$

اب چونکہ س، س کا تفاعل ہے اِس مساوات کو س کے لحاظ سے تفرق کیا جا سکتا ہے، چنانچہ

$$\text{م} + \int \text{س فر س} = \frac{1}{2}\text{ک و}^{2} \qquad (92)$$

جہاں م تکمل کا مستقل ہے۔

چونکہ و، $\frac{\text{فر س}}{\text{فر ت}}$ کے مساوی ہے اسلیے اِس مساوات کو شکل

$$\frac{\text{فر س}}{\text{فر ت}} = \sqrt{\frac{2}{\text{ک}}\left(\text{م} + \int \text{س فر س}\right)} \qquad (93)$$

میں رکھا جا سکتا ہے اور یہ درجۂ اول کی مساوات ہے۔ اگر یہ حل ہو سکے تو مسئلہ مکمل طور پر حل ہو جائے گا۔

(256) ہم دیکھتے ہیں کہ مساوات (۹۲) کی بائیں جانب، ذرہ کی توانائی بالحرکت ہے۔ نیز چونکہ ذرہ کے راستہ کی سمت میں اِس کی حرکت میں مزاحم قوت۔ س ہے اس لیے ذرہ کی توانائی بالقوہ

$$-\int \text{س فر س}$$

ہے۔ پس مساوات (۹۲) سے واضح ہے کہ توانائی بالحرکت اور توانائی بالقوہ کا مجموعہ مستقل رہتا ہے، یہ مساوات ذرہ کی حرکت کے لیے توانائی کی مساوات ہے۔ اگر ہمیں ذرہ کی حرکت کے کسی لمحہ پر کُل توانائی معلوم ہو تو ہم مستقل م متعین کر سکتے ہیں اور پھر مساوات (۹۳) کو تکمل کیا جا سکتا ہے اگر وہ ممکن ہے۔

توضیحی مثال

یہ تسلیم کر کے کہ جاذبہ کی قیمت، زمین کے مرکز سے فاصلہ کے

مربع کے بالعکس بدلتی ہے ایک مرمی کی حرکت معلوم کرو جس کو ہوا میں انتصاباً پھینکا گیا ہے، جاذبہ کی تخفیف کا لحاظ رکھو۔

فرض کرو کہ زمین کا نصف قطر ا ہے اور اس کی سطح پر جاذبہ کی قیمت ج ہے تب زمین کے مرکز سے ر فاصلہ پر جاذبہ کی قیمت $\frac{ج ا^2}{ر^2}$ ہوگی۔

چونکہ ذرہ، زمین کے مرکز سے کھینچے ہوئے ایک نصف قطر پر حرکت کرتا ہے اس لیے ہم تمام فاصلوں کو زمین کے مرکز سے پیمائش کر سکتے ہیں اور دفعہ ۲۰۴ کے محدد س کی بجائے فاصلہ ر لے سکتے ہیں۔ قوت س کی قیمت، مرمی کے راستہ کی سمت میں تحلیل شدہ، $\frac{ک ج ا^2}{ر^2}$ ہے اور اس لئے حرکت کی مساوات

$$ک \frac{فر^2 ر}{فرت^2} = \frac{ک ج ا^2}{ر^2} -$$

ہے۔ توانائی کی مساوات بموجب مساوات (۹۲) حسب ذیل ہے:

$$\frac{1}{2} ک و^2 = م - \int \frac{ک ج ا^2}{ر^2} فر$$

$$\text{یا} \quad \frac{1}{2} ک و^2 = م + \frac{ک ج ا^2}{ر} \qquad (ا)$$

فرض کرو کہ ذرہ کو زمین کی سطح سے رفتار و کے ساتھ پھینکا گیا تھا۔ مساوات (ا) میں ر = ا رکھنے سے و کی قیمت و حاصل ہونی چاہئے اور اس لیے

$$\frac{1}{2} ک و^2 = م + ک ج ا \qquad (ب)$$

اس مساوات سے م معلوم ہوگا۔ مساواتوں (ا) اور (ب) سے م کو ساقط کیا جائے تو

$$\frac{1}{2}(و^2 - و^2) = ج ا \left(1 - \frac{ا}{ر}\right)$$

$$\therefore \quad و = \sqrt{و^2 - 2 ج ا \left(1 - \frac{ا}{ر}\right)} \qquad (ج)$$

اِس سے کسی نقطہ پر رفتار معلوم ہوگی ۔ نیز چونکہ و = $\frac{\text{فر ر}}{\text{فر ت}}$ اِس لیے یہ مساوات ہو جاتی ہے

$$\frac{\text{فر ر}}{\text{فر ت}} = \sqrt{\text{و}^2 - ۲\,\text{ج}\,\text{ا}\left(۱ - \frac{\text{ا}}{\text{ر}}\right)} \qquad (\text{د})$$

اِس لیے

$$\text{ت} = \int \frac{\text{فر ر}}{\sqrt{\text{و}^2 - ۲\,\text{ج}\,\text{ا} + \frac{۲\,\text{ج}\,\text{ا}^2}{\text{ر}}}} \qquad (\text{ع})$$

تکمل کے عمل کی تکمیل کرنے سے وہ وقت معلوم ہو سکتا ہے جو راستہ کا کوئی حصہ طے ہونے میں لگتا ہے ۔ فرض کرو کہ ہم حل کے مختلف نمونوں پر غور کرتے ہیں ۔
ہم مساوات (ج) سے دیکھتے ہیں کہ و معدوم ہوتا ہے جبکہ

$$\text{ر} = \frac{۲\,\text{ج}\,\text{ا}^2}{۲\,\text{ج}\,\text{ا} - \text{و}^2}$$

اِس لیے اگر و^2 < ۲ ج ا تو + ا اور + ∞ کے درمیان ر کی ایک مثبت قیمت ہے جس کے لیے رفتار معدوم ہوتی ہے ۔ پس اگر و^2 < ۲ ج ا تو مرمی اُس نقطہ تک جاتا ہے جس کا فاصلہ زمین کے مرکز سے $\frac{۲\,\text{ج}\,\text{ا}^2}{۲\,\text{ج}\,\text{ا} - \text{و}^2}$ ہے اور پھر زمین پر واپس گرتا ہے ۔ اگر و^2 > ۲ ج ا تو ر کی کوئی مثبت قیمت حاصل نہیں ہوتی جس کے لیے و معدوم ہو اور اِس لیے ذرہ لاتناہی تک چلا جاتا ہے، وہ زمین کے جاذبہ سے صاف بچ نکلتا ہے ۔

اگر و^2 = ۲ ج ا تو رفتار لاتناہی پر معدوم ہوتی ہے، اِس لیے ذرہ زمین کی کشش سے عین بچ جاتا ہے لیکن صرف صفر رفتار کے ساتھ ۔ پھینکنے میں اس کی توانائی بالحرکت زمین کی کشش پر غالب آنے میں عین کافی ہوتی ہے ۔

فرض کرو کہ ہم اول اِس خاص صورت و^2 = ۲ ج ا پر غور کرتے ہیں ۔ ہم دیکھتے ہیں کہ مساوات (ع)

$$\text{ت} = \int \frac{\text{فر ر}}{\sqrt{\frac{۲\,\text{ج}\,\text{ا}^2}{\text{ر}}}}$$

$$= \frac{۲}{۳}\,\frac{\text{ر}^{\frac{۳}{۲}}}{\sqrt{۲\,\text{ج}\,\text{ا}^{۲}}} + \text{مَ}$$

میں تحویل ہوتی ہے جہاں مَ تکمل کا ایک نیا مستقل ہے۔

اگر ہم وقت کو پھینکنے کے لمحہ سے شمار کریں تو ت = ۰ حاصل ہونا چاہیے جبکہ ر = ا اور اِس لیے

$$۰ = \frac{۲}{۳}\sqrt{\frac{\text{ا}}{۲\,\text{ج}}} + \text{مَ}$$

اور مَ کو ساقط کرنے پر

$$\text{ت} = \frac{۲}{۳\sqrt{۲\,\text{ج}\,\text{ا}}}\left(\text{ر}^{\frac{۳}{۲}} - \text{ا}^{\frac{۳}{۲}}\right) \qquad (\text{ف})$$

اُس صورت میں جبکہ $\text{و}^{۲} > ۲\,\text{ج}\,\text{ا}$ مساوات (ع) کو تکمل کرنے کے بعد حاصل ہوتا ہے (۲۵۸)

$$\text{ت} = -\frac{\text{ج}\,\text{ا}}{\text{و}^{۲} - ۲\,\text{ج}\,\text{ا}}\left\{\frac{۱}{\sqrt{\text{و}^{۲} - ۲\,\text{ج}\,\text{ا}}}\,\text{لوک}\,\frac{\sqrt{\text{و}^{۲} - ۲\,\text{ج}\,\text{ا} + \frac{۲\,\text{ج}\,\text{ا}^{۲}}{\text{ر}}} - \sqrt{\text{و}^{۲} - ۲\,\text{ج}\,\text{ا}}}{\sqrt{\text{و}^{۲} - ۲\,\text{ج}\,\text{ا} + \frac{۲\,\text{ج}\,\text{ا}^{۲}}{\text{ر}}} + \sqrt{\text{و}^{۲} - ۲\,\text{ج}\,\text{ا}}} + \frac{۲\,\text{ب}}{\text{ر}}\sqrt{\text{و}^{۲} - ۲\,\text{ج}\,\text{ا} + \frac{۲\,\text{ج}\,\text{ا}^{۲}}{\text{ر}}}\right\} + \text{مَ} \qquad (\text{گ})$$

جہاں مَ تکمل کا ایک نیا مستقل ہے۔ اگر وقت کو اُس لمحہ سے شمار کیا جائے جس میں ذرہ کو پھینکا گیا تھا تو ت = ۰ کے لیے ر = ا حاصل ہونا چاہیے، اور اس لیے

$$۰ = -\frac{\text{ج}\,\text{ا}}{\text{و}^{۲} - ۲\,\text{ج}\,\text{ا}}\left\{\frac{۱}{\sqrt{\text{و}^{۲} - ۲\,\text{ج}\,\text{ا}}}\,\text{لوک}\,\frac{\text{و} - \sqrt{\text{و}^{۲} - ۲\,\text{ج}\,\text{ا}}}{\text{و} + \sqrt{\text{و}^{۲} - ۲\,\text{ج}\,\text{ا}}} + \frac{۲\,\text{ب}\,\text{و}}{\text{ا}}\right\} + \text{مَ}$$

اور مَ کو ساقط کرنے پر ہم پھر وہ وقت معلوم کر سکتے ہیں جو راستہ کا کوئی حصہ طے ہونے میں مطلوب ہوتا ہے۔ صورت $\text{و}^{۲} < ۲\,\text{ج}\,\text{ا}$ پر بھی اسی طرح بحث کی جاسکتی ہے۔

اس کو طالب علم پر بطور مشق کے چھوڑا جاتا ہے۔

مثالیں

۱۔ پچھلی توضیحی مثال میں فرض کرو $\text{ع}^2 > 2\,\text{ج}\,\text{ا}$ اور معلوم کرو

(ا) بلند ترین ارتفاع جہاں تک ذرہ پہنچتا ہے،

(ب) ذرہ کی پرواز کا وقت

۲۔ ایک شہاب زمین پر گرتا ہے۔ فرض کرو کہ وہ لاتناہی سے صفر رفتار کے ساتھ نکلا تھا اور راست زمین پر گرا۔ زمین کی سطح پر جس رفتار سے وہ پہنچتا ہے اس کو معلوم کرو۔ نیز وہ وقت معلوم کرو جو شہاب اس نقطہ سے زمین کی سطح پر گرنے میں لیتا ہے جس کا فاصلہ زمین کے مرکز سے ر ہے۔

۳۔ ایک ذرہ فاصلہ ا سے قوت کے ایک مرکز پر گرتا ہے جو قانون $\frac{\text{مہ}}{\text{ر}^2}$ کی بموجب کشش کرتی ہے۔ ثابت کرو کہ راستہ کے نصف حصہ پر اوسط رفتار کو راستہ کے دوسرے نصف حصہ پر اوسط رفتار کے ساتھ حسب ذیل نسبت ہے:

$$۱۱ - ۲ : ۱۱ + ۲$$

۴۔ قوت کے ایک مرکز پر گرنے کا وقت معلوم کرو جو قانون $\text{مہ}\,\text{ر}^{\frac{5}{3}}$ کی بموجب کشش رکھتی ہے۔

۵۔ ایک ذرہ فاصلہ ا سے کشش کے ایک مرکز کی جانب خط مستقیم میں حرکت کرتا ہے۔ قوت کا قانون $\frac{\text{مہ}}{\text{ر}^3}$ ہے۔ ثابت کرو کہ مرکز تک پہنچنے میں جو وقت مطلوب ہے وہ $\frac{\text{ا}^2}{\text{مہ}}$ ہے۔

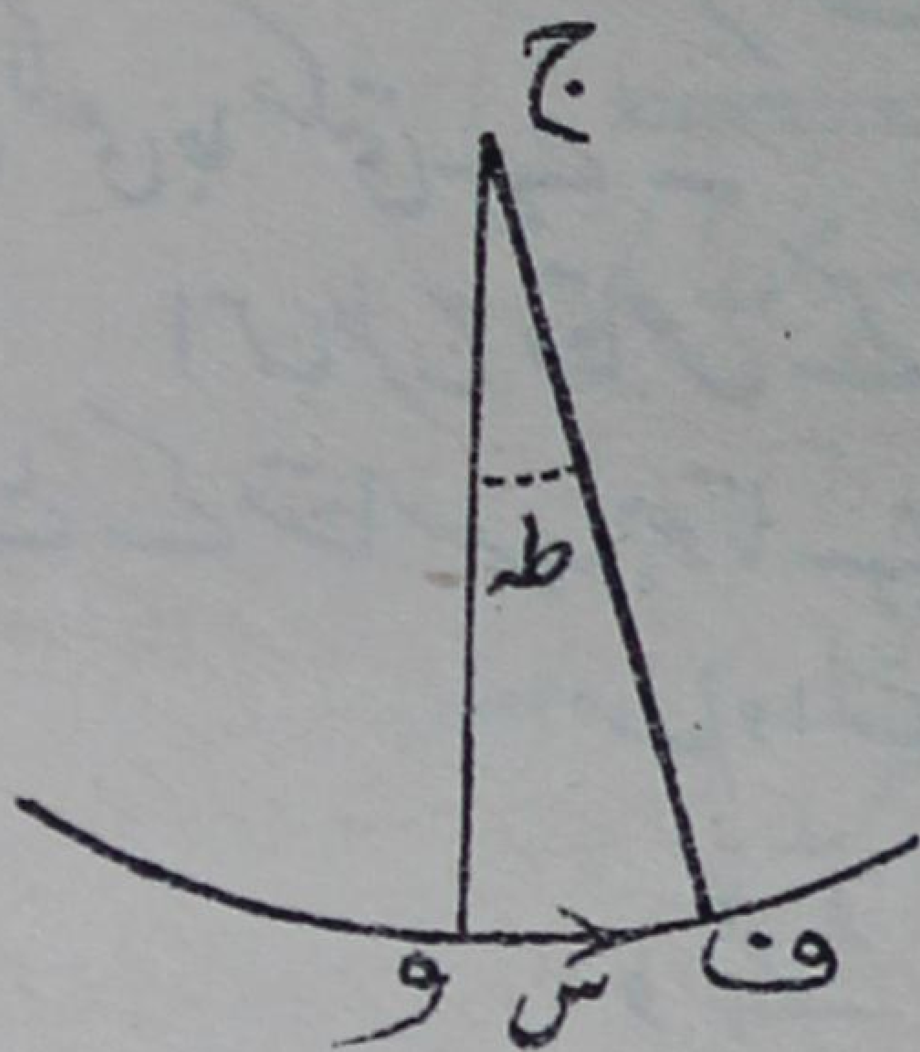
۶۔ ایک ذرہ فاصلہ ا سے ایک ثابت مرکز کی جانب حرکت کرنا شروع کرتا ہے۔ قوت کا مرکز قانون مہ ر کی بموجب دفع کرتا ہے۔ اگر ذرہ کی ابتدائی رفتار $\sqrt{\text{مہ}}\,\text{ا}$ ہے تو ثابت کرو کہ وہ ثابت مرکز کی جانب مسلسل بڑھتا جائے گا لیکن اس تک کبھی بھی نہ پہنچیگا۔

سادہ رقاص

(۲۵۷)

۲۰۵ — متغیر قوت کی اہم ترین صورتوں میں سے ایک سادہ رقاص کی

حرکت سے مہیا ہوتی ہے ۔ پہلا تقرب حاصل کرنے کے لیے ہم فرض کر سکتے ہیں کہ رقاص کا پورا وزن اِس کے لنگر میں مرتکز ہے جس کو ایک ذرہ خیال کیا جا سکتا ہے ۔ اِس لنگر کو ایک ثابت نقطہ سے ایک بے وزن ڈوری یا ڈنڈے کے ذریعہ لٹکایا جاتا ہے اور اِس لیے وہ ایک انتصابی دائرہ میں حرکت کرنے پر مجبور ہوتا ہے ۔ فرض کرو کہ اِس دائرہ پر ذرہ جو فاصلہ طے کرتا ہے اُس کو س سے تعبیر کیا گیا ہے جہاں س کو زیریں ترین نقطہ و سے پیمائش کیا گیا ہے ۔ فرض کرو کہ ڈوری اور انتصابی کے درمیان زاویہ ف ج و ‹ط سے تعبیر ہوتا ہے اور اِس لیے س = ا ط جہاں ا ڈوری کا طول ہے ۔ ذرہ پر عمل کرنے والی قوت اِس کے وزن اور ڈوری کے تناؤ پر مشتمل ہے ۔ بعد الذکر اُس سمت میں جس میں ذرہ حرکت کرتا ہے کوئی جزو ترکیبی نہیں رکھتی ۔ اول الذکر کا جزو ترکیبی اِس سمت میں ۔ ک ج جب ط ہے ۔ اِس لیے حرکت کی مساوات ہے



شکل (۱۳۰)

$$\frac{\text{فر}^2\,\text{س}}{\text{فرت}^2} = -\text{ج جب ط} \qquad (۹۴)$$

جہاں $\text{ط} = \frac{\text{س}}{\text{ا}}$ ۔

۲۰۶ ــ اِس مساوات کو ابتدائی ریاضی کے ذریعہ حل نہیں کیا جا سکتا اِلّا اُس سادہ صورت کے جس میں زاویہ ط چھوٹا ہو یعنے جس میں رقاص انتصابی سے ایک چھوٹے زاویہ سے زیادہ نہ جھولنے پائے ۔ اِس صورت پر اپنی توجہ محدود رکھنے سے ہم جب ط کی بجائے ط رکھ سکتے ہیں اور ط کی

بجائے $\frac{س}{ا}$ ۔ چنانچہ حرکت کی مساوات شکل

$$\frac{فر^2 س}{فر ت^2} = -\left(\frac{ج}{ا}\right) س$$

میں لکھی جا سکتی ہے ۔

اِس طرح رقاص کے لنگر کا اسراع، و کی جانب اور و سے اِس کے فاصلے کے متناسب ہوتا ہے ۔

مساوات کو شکل (۲۶۰)

$$و \frac{فر و}{فر س} = -\left(\frac{ج}{ا}\right) س$$

میں لکھنے اور س کے لحاظ سے تکمل کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$و^2 = م - \left(\frac{ج}{ا}\right) س^2 \quad (۹۵)$$

صریحاً مستقل م کو مثبت ہونا چاہئے اور رفتار معدوم ہو گی جوں ہی س ایسی قیمت پر پہنچے کہ

$$م = \left(\frac{ج}{ا}\right) س^2$$

فرض کرو کہ اِس مساوات کو پورا کرنے والی س کی قیمتیں ± س. سے تعبیر ہوتی ہیں، تب لنگر کی حرکت صریحاً اُن نقطوں کے اندر مقید رہتی ہے جو نقطہ و سے اِس کی مخالف سمتوں میں فاصلہ س. پر ہیں ۔ ہم س. کو اہتزاز کا حیطہ کہہ سکتے ہیں ۔

م کی بجائے $\left(\frac{ج}{ا}\right) س_.^2$ رکھنے سے مساوات (۹۵) ہو جاتی ہے

$$و^2 = \frac{ج}{ا}\left(س_.^2 - س^2\right)$$

اس لیے
$$\frac{\text{فرس}}{\text{فرت}} = \sqrt{\frac{\text{ج}}{\text{ا}}\left(\text{س}_{\text{۰}}^{2} - \text{س}^{2}\right)}$$

اور اس مساوات کا تکملہ ہے

$$\text{ت} = \int \frac{\text{فرس}}{\sqrt{\frac{\text{ج}}{\text{ا}}\left(\text{س}_{\text{۰}}^{2} - \text{س}^{2}\right)}}$$

$$= \sqrt{\frac{\text{ا}}{\text{ج}}}\ \text{جم}^{-1}\left(\frac{\text{س}}{\text{س}_{\text{۰}}}\right) + \text{صہ}$$

جہاں صہ تکمل کا مستقل ہے۔
اس مساوات سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{جم}^{-1}\left(\frac{\text{س}}{\text{س}_{\text{۰}}}\right) = \sqrt{\frac{\text{ج}}{\text{ا}}}\ (\text{ت} - \text{صہ})$$

اس لیے
$$\text{س} = \text{س}_{\text{۰}}\ \text{جم}\left\{\sqrt{\frac{\text{ج}}{\text{ا}}}\ (\text{ت} - \text{صہ})\right\} \qquad (۲۶۱)$$

اس مساوات میں مسئلہ کا پورا حل شامل ہے۔ ہم دیکھتے ہیں کہ س کی قیمتیں وقت $\text{ت}_{\text{۰}}$ کے وقفوں سے مسلسل تکرار پاتی ہیں جہاں $\text{ت}_{\text{۰}}$، مساوات

$$\sqrt{\frac{\text{ج}}{\text{ا}}}\ \text{ت}_{\text{۰}} = 2\pi$$

سے حاصل ہوتا ہے۔
اس طرح رقاص کی حرکت لاانتہا مرتبہ خود تکرار پاتی ہے۔ اُن دو لمحات کے درمیان وقفہ جن پر رقاص ایک ہی محل میں ہوتا ہے یعنے وقفہ $\text{ت}_{\text{۰}}$ مساوات

$$\text{ت}_{\text{۰}} = 2\pi\sqrt{\frac{\text{ا}}{\text{ج}}}$$

سے حاصل ہوتا ہے اور اس کو رقاص کا دور کہتے ہیں ۔

۲۰۷ ۔ ثانیوں کا رقاص ۔ اس رقاص کو بنانے کے لیے جو ثانیوں کو ضربوں کے ذریعہ ظاہر کرے ہم اکو ایسا لیتے ہیں کہ ت، دو ثانیوں کے مساوی ہو کیونکہ ثانیوں کا رقاص ایسا رقاص ہونا چاہئے جو بائیں جانب سے سیدھی جانب حرکت کرنے میں ایک ثانیہ اور پھر سیدھی جانب سے بائیں جانب حرکت کرنے میں ایک ثانیہ لے ۔ اس لیے

$$\pi \sqrt{\frac{ا}{ج}} = ۱$$

فٹ ثانیہ اکائیوں میں ہم لندن کے لیے ج = ۳۲٫۱۹ لے سکتے ہیں اور اس طرح حاصل ہوتا ہے

$$ا = ۳۹٫۱۴ \text{ انچ}$$

یعنے لندن کے لیے ثانیوں کے رقاص کا طول ۳۹٫۱۴ انچ ہونا چاہئے ۔

ہم دیکھتے ہیں کہ کسی رقاص کا دور اس کے طول کے جذر المربع کے متناسب ہوتا ہے ۔ مثلاً اس رقاص میں جو نصف ثانیوں کو ضربوں کے ذریعہ ظاہر کرتا ہے اس کا طول ثانیوں کے رقاص کے طول کا صرف ایک چوتھائی ہوگا اور اس لیے لندن میں ۹٫۷۸ انچ ۔

چونکہ ج کی قیمت زمین کی سطح پر نقطہ بہ نقطہ بدلتی ہے اس لیے ثانیوں کے رقاص کا طول بھی متغیر ہوگا ۔ اگر ہم رقاص کا طول دیکھیں اور نیز وقت پیما سے اس کا دور معلوم کریں تو ہم اس مقام پر جہاں تجربہ کیا جا رہا ہے ج کی قیمت محسوب کر سکتے ہیں، فی الحقیقت یہ طریقہ زمین کی سطح کے کسی نقطہ پر ج کی قیمت معلوم کرنے کے لیے سب سے زیادہ آسان اور صحیح ترین ہے ۔

توضیحی مثال

(۲۶۲) ایک رقاص نیویارک میں ثانیوں کو صحیح طور پر ضربوں کے ذریعہ ظاہر

کرتا ہے، اس کو فیلیڈلفیا لیجانے پر معلوم ہوا کہ وہ وہاں ۲ ثانئے فی یوم تیز رہتا ہے۔ نیویارک اور فیلیڈلفیا پر ج کی قیمتوں کا مقابلہ کرو۔

فیلیڈلفیا میں رقاص ۲۴ × (۶۰)^2 ثانیوں میں ۲۴ × (۶۰)^2 + ۲ بار ضربیں ظاہر کرتا ہے۔ اس لیے ایک ضرب کا وقت

$$\frac{۲۴ \times (۶۰)^2}{۲۴ \times (۶۰)^2 + ۲}$$

ہے اور یہ $\pi \sqrt{\frac{ل}{ج}}$ کے مساوی ہے جہاں ل، رقاص کا طول ہے اور ج، فیلیڈلفیا میں جاذبہ کی قیمت ہے۔ اگر نیویارک میں جاذبہ کی قیمت ج. سے تعبیر ہو تو

$$ج. = \pi^2 ل$$

$$ج = \pi^2 ل \left[\frac{۲۴ \times (۶۰)^2 + ۲}{۲۴ \times (۶۰)^2}\right]$$

$$= \pi^2 ل \left(۱ + \frac{۴}{۲۴ \times (۶۰)^2}\right) \text{ تقریباً}$$

اس لیے　$$ج = ج. \left(۱ + \frac{۴}{۲۴ \times (۶۰)^2}\right)$$

$$= ج. \left(۱ + \frac{۱}{۲۱۶۰۰}\right) \text{ تقریباً}$$

اس طرح نیویارک کی بہ نسبت فیلیڈلفیا میں جاذبہ تقریباً ۲۱۶۰۰ میں ایک حصہ زیادہ ہے۔

مثالیں

۱۔ ایک رقاص کا طول محسوب کرو جو ایک منٹ میں ۱۰۰ دفعہ ضربوں کے ذریعہ وقت کی پیمائش کرتا ہے۔

۲ ــ ایک رقاص لندن میں ثانیوں کو صحیح طور پر ضربوں سے ظاہر کرتا ہے، اگر یہ رقاص نیویارک میں ہو تو اس سے صحیح وقت کی پیمائش ہوتی ہے اگر اس کے طول کو بقدر ایک ہزارویں حصہ کے چھوٹا کر دیا جائے۔ لندن اور نیویارک میں جاذبہ کی قیمتوں کا مقابلہ کرو۔

۳ ــ زمین کی سطح پر عرض بلد لہ میں ایک نقطہ پر ج کی قیمت

ج = ج. (۱ ــ ۰۰۲۵۰۷ جم ۲ لہ)

ہے جہاں ج. (= ۳۲۰۱۷) عرض بلد ۴۵° میں ج کی قیمت ہے۔ ثابت کرو کہ وہ عرض بلد جس میں معلومہ طول کا ایک چھوٹا سفر رقاص گھڑی کی شرح میں بڑی سے بڑی خطا پیدا کرتا ہے عرض بلد ۴۵° ہے، اِس عرض بلد میں خطا فی میل معلوم کرو۔
(عرض بلد کا ایک دقیقہ = ۶۰۷۵ فٹ)

۴ ــ ایک عمارت میں زمین سے اوپر ف ارتفاع پر جاذبہ کی قیمت

ج ــ ۳ ۰۰۰۰۰۰ ف

ہے جہاں ج، عمارت کے پائین پر جاذبہ کی قیمت ہے نیویارک میں ج = ۳۲۰۱۴۔ رقاص گھڑی کی شرح میں وہ خطا معلوم کرو جو اس کو زمین سے ۳۰۰ فٹ بلند عمارت کی چھت پر لیجانے سے پیدا ہوتی ہے۔

(۲۶۳) ۵ ــ ایک رقاص کا طول ل ہے اور وہ ۲ ن ضربیں فی یوم ظاہر کرتا ہے اگر اس طول کو ل + لَ میں بدل دیا جائے تو ثابت کرو کہ رقاص تقریباً

$\frac{\text{ن لَ}}{\text{ل}}$ ضربیں فی یوم کھو دیگا۔

۶ ــ ایک غبارہ مستقل اسراع کے ساتھ بلند ہوتا ہے اور دو منٹ میں ۳۶۰۰ فٹ کے ارتفاع تک پہنچ جاتا ہے۔ ثابت کرو کہ اس چڑھاؤ میں رقاص گھڑی تقریباً ایک ثانیہ تیز ہو گئی ہو گی۔

۷ ــ طول ل کے ایک رقاص کو اس کے لنگر کے صرف ایک چھوٹے حصہ کو حرکت دیکر ٹھیک بنایا جا سکتا ہے، اس حصہ کی کمیت کل لنگر کی کمیت کا $\frac{۱}{\text{ن}}$ ہے۔ اس کو کتنی دور تک حرکت دینی چاہئے کہ ف ثانئے فی یوم کی خطا کی

تصحیح ہو جائے۔

سادہ موسیقی حرکت

۲۰۸ — ہم دیکھ چکے ہیں کہ اگر کوئی رقاص اس طور پر حرکت کرے کہ انتصابی کے ساتھ اس کا اعظم میلان چھوٹا ہو تو اس کی کل حرکت میں جو اسراع پیدا ہوتا ہے وہ اس کے راستہ کے وسطی نقطہ سے فاصلہ کے متناسب ہوتا ہے اور اسراع کی سمت اس نقطہ کی جانب ہوتی ہے۔ اگر کوئی نقطہ اس طریقہ پر حرکت کرے تو ہم کہتے ہیں کہ وہ سادہ موسیقی حرکت کے ساتھ حرکت کر رہا ہے۔ چنانچہ اگر ایک نقطہ سادہ موسیقی حرکت کرے اور ایک ثابت نقطہ سے اس کا فاصلہ س ہو تو شکل

$$\frac{\text{فر}^2\text{س}}{\text{فرت}^2} = -\text{ک}^2\text{س}$$

کی ایک مساوات حاصل ہوتی ہے جہاں ک ایک مستقل ہے۔

تکمل کرنے سے حسب سابق (مقابلہ کرو مساوات (۹۶) کے ساتھ) مساوات

$$\text{و}^2 = \text{ک}^2(\text{س}_\text{ب}^2 - \text{س}^2)$$

حاصل ہوتی ہے اور پھر اس سے مساوات

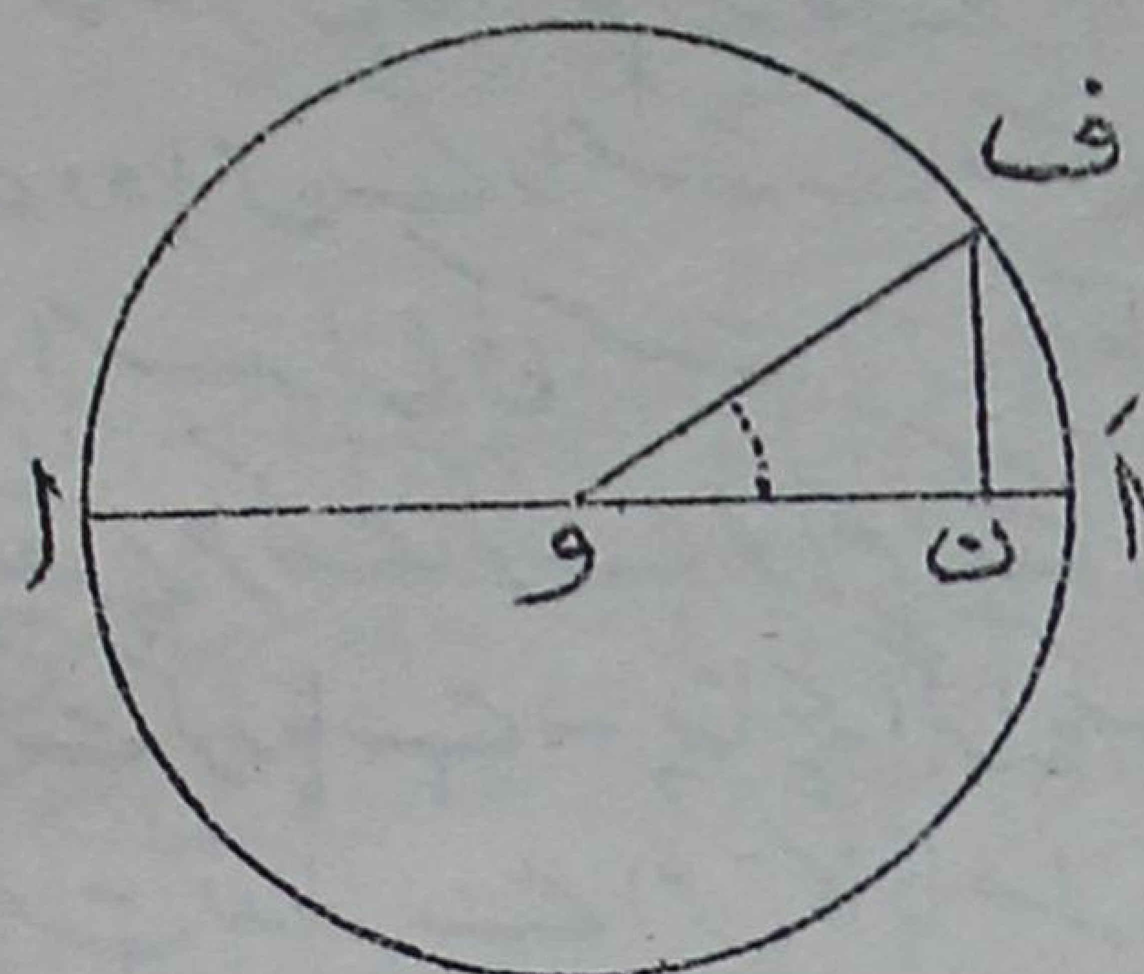
$$\text{س} = \text{س}_\text{ب}\ \text{جم ک}\ (\text{ت} - \text{صہ}) \qquad (۹۷)$$

ملتی ہے۔

مستقل ک کو حرکت کا **تعدد** کہتے ہیں۔ مثلاً کسی سادہ رقاص کا تعدد $\sqrt{\frac{\text{ج}}{\text{ل}}}$ ہے۔

۲۰۹ — سادہ موسیقی حرکت کی ایک آسان ہندسی توجیہ کی جا سکتی ہے اور اس سے اس حرکت کا پورا علم تکملی احصاء یا تفرقی مساواتوں کے نظریہ کے استعمال کے بغیر ہو جاتا ہے۔ شکل ۱۳۱ میں فرض کرو کہ خط و ف و کے

گرد یکساں زاویٔ رفتار ک کے ساتھ گردش کرتا ہے اور اس لیے ف، یکساں رفتار ک ا کے ساتھ نصف قطر ا کا ایک دائرہ مرتسم کرتا ہے۔ فرض کرو کہ ف سے ایک ثابت قطر ا اَ پر عمود ف ن کھینچا گیا ہے۔ اب معلوم ہوگا کہ نقطہ ن، خط ا اَ پر سادہ موسیقی حرکت کے ساتھ آگے اور پیچھے حرکت کرتا ہے۔ (۲۶۴)



شکل (۱۳۱)

ف کا اسراع بموجب دفعہ ۱۲ ف و کی سمت میں ک۲ ا ہے۔ اِس اسراع کو دو اسراعوں کا مرکب خیال کیا جا سکتا ہے (۱) ن کے لحاظ سے ف کا اسراع جس کو ن ف پر ہونا چاہئے (۲) و کے لحاظ سے ن کا اسراع جس کو و ن پر ہونا چاہئے۔ پس ن کا اسراع، ف کے اسراع کا وہ جزو ترکیبی ہے جو سمت ا اَ میں ہے۔ لیکن یہ جزو ترکیبی ک۲ ا جم ط یا ک۲ × و ن ہے اور اِس کی سمت ن و ہے۔ و ن کو س کے مساوی لینے سے اسراع ک۲ س اُس سمت میں حاصل ہوتا ہے جس میں س کی پیمائش ہوئی ہے یعنے و ن۔ اِس لئے نقطہ ن سادہ موسیقی حرکت کے ساتھ حرکت کرتا ہے۔

سادہ موسیقی حرکت کی اِس ہندسی توجیہ سے و اور س کے لیے جملے راست حاصل کئے جا سکتے ہیں، س کی قیمت و ن یا ا جم ط ہے۔ فرض کرو کہ ت = صہ وہ لمحہ ہے جس پر نقطہ ف، دائرہ کے گرد اپنی حرکت میں نقطہ اَ میں سے گذر رہا تھا، تب اس کے بعد کسی لمحہ ت پر وقت ت ـ صہ ہوگا اور اس لیے و ف سے مرتسم شدہ زاویہ ط = ک (ت ـ صہ) ہوگا۔ اس لیے

$$\text{س} = \text{و ن} = \text{ا جم ک (ت ـ صہ)} \qquad (۹۸)$$

یہ وہی نتیجہ ہے جو مساوات (۹۷) میں مندرج ہے۔ ہم دیکھتے ہیں کہ حرکت کا حیطہ س، وہی ہے جو دائرہ کا نصف قطر ا ہے اور تعدد ک، زاویٔ رفتار کے مماثل ہے۔ مساوات (۹۸) کو تفرق کرنے سے رفتار کے لیے فوراً حاصل ہوتا ہے

و = فرس / فرت = ـ ک ا جب ک (ت ـ صہ)

= ک √(ا² ـ س²)

(۲۶۵) اس نتیجہ کو اس طریقہ پر بھی حاصل کیا جا سکتا ہے کہ متحرک نقطہ ف کی رفتار ک ا کو ا اَ کی سمت میں اور اس کے علی القوائم سمت میں تحلیل کیا جائے۔ اول الذکر صریحاً ا اَ پر ن کی رفتار ہے اور اس کی مقدار ـ ک ا جب طہ یا

و = ـ ک ا جب ک (ت ـ صہ)

= ک √(ا² ـ س²)

حسب سابق فوراً حاصل ہوتی ہے۔

اس حرکت میں سادہ رقاص کی حرکت کی طرح مقدار ا کو حیطہ کہتے ہیں اور وقت ۲π/ک کو جس کے بعد حرکت خود تکرار پاتی ہے دَور کہتے ہیں۔

مثالیں

۱۔ ایک ذرہ، ۱۲ ثانیوں کے دَور کی سادہ موسیقی حرکت کے ساتھ حرکت کرتا ہے اور ۵ فٹ کا حیطہ رکھتا ہے۔ اس کی اعظم رفتار معلوم کرو اور یہ اعظم رفتار جس لمحہ پر واقع ہوتی ہے اس کے ایک ثانیہ بعد ذرہ کا محل اور اس کی رفتار معلوم کرو۔

۲ — ایک ذرہ جو دَورت کی سادہ موسیقی حرکت کے ساتھ حرکت کر رہا ہے اپنے اوسط محل سے فاصلہ ا پر رفتار و رکھتا ہے۔ اِس کا حیطہ معلوم کرو۔

۳ — ایک ذرہ ایک خط ا ب پر حرکت کرنے میں آزاد ہے۔ اس پر ایک قوت جاذبہ عمل کرتی ہے جو ا ب کے ایک نقطہ ف سے اس کے فاصلے کے متناسب ہے اور اس لیے ذرہ سادہ موسیقی حرکت کے ساتھ حرکت کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ اس کی اوسط توانائی بالحرکت اس کی اوسط توانائی بالقوہ کے مساوی ہے۔

۴ — ایک ذرہ سادہ موسیقی حرکت کے ساتھ حرکت کر رہا ہے اور اس کے اوسط محل سے فاصلوں ۴ اور ۳ فٹ پر اس کی رفتاریں علی الترتیب ۳ اور ۴ فٹ فی ثانیہ ہیں۔ اِس کا حیطہ اور دَور معلوم کرو۔

۵ — ایک ذرہ ایک فریم کے لحاظ سے سادہ موسیقی حرکت رکھتا ہے اور خود فریم بھی ایک دوسرے فریم کے لحاظ سے سادہ موسیقی حرکت رکھتا ہے۔ اِن دو حرکتوں کی سمتیں متوازی ہیں اور اِن کے دَور ایک ہی ہیں۔ ثابت کرو کہ دوسرے فریم کے لحاظ سے متحرک نقطہ کی حرکت سادہ موسیقی حرکت ہے جس کی سمت اور دَور وہی ہیں جو فریم کی حرکت کے ہیں۔

۶ — طبعی طول ل اور مقیاس لہ کی ایک لچلدار ڈوری سے ایک وزن و باندھا گیا ہے اور اس کو توازن کی حالت میں انتصاباً لٹکنے چھوڑ دیا گیا ہے۔ اب وزن کو انتصاباً نیچے مزید فاصلہ ف تک کھینچا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ وزن کو آزاد چھوڑ دینے پر وہ حیطہ ف کی سادہ موسیقی حرکت رکھیگا بشرطیکہ اس میں ڈوری کی غیر تنی ہوئی حالت کبھی بھی وقوع پذیر نہ ہو۔ حرکت کا دَور معلوم کرو۔

تدویری رقاص

۲۱۰ — ہم دیکھ چکے ہیں کہ ایک سادہ رقاص کی حرکت صرف اُس وقت تک سادہ موسیقی حرکت رہتی ہے جب تک کہ حرکت کا

حیطہ چھوٹا رہتا ہے۔ لیکن جاذبہ کے تحت ذرہ کی حرکت کو اس طریقہ سے مقید کرنا ممکن ہے کہ اس کی حرکت سادہ موسیقی حرکت ہو دراں حالیکہ حیطہ خواہ کتنا ہی بڑا ہو۔

(۲۶۶) وہ منحنی معلوم کرنے کے لیے جس میں ذرہ کی حرکت کو مقید کرنا پڑتا ہے فرض کرو کہ ہم مساوات (۹۴) یعنے

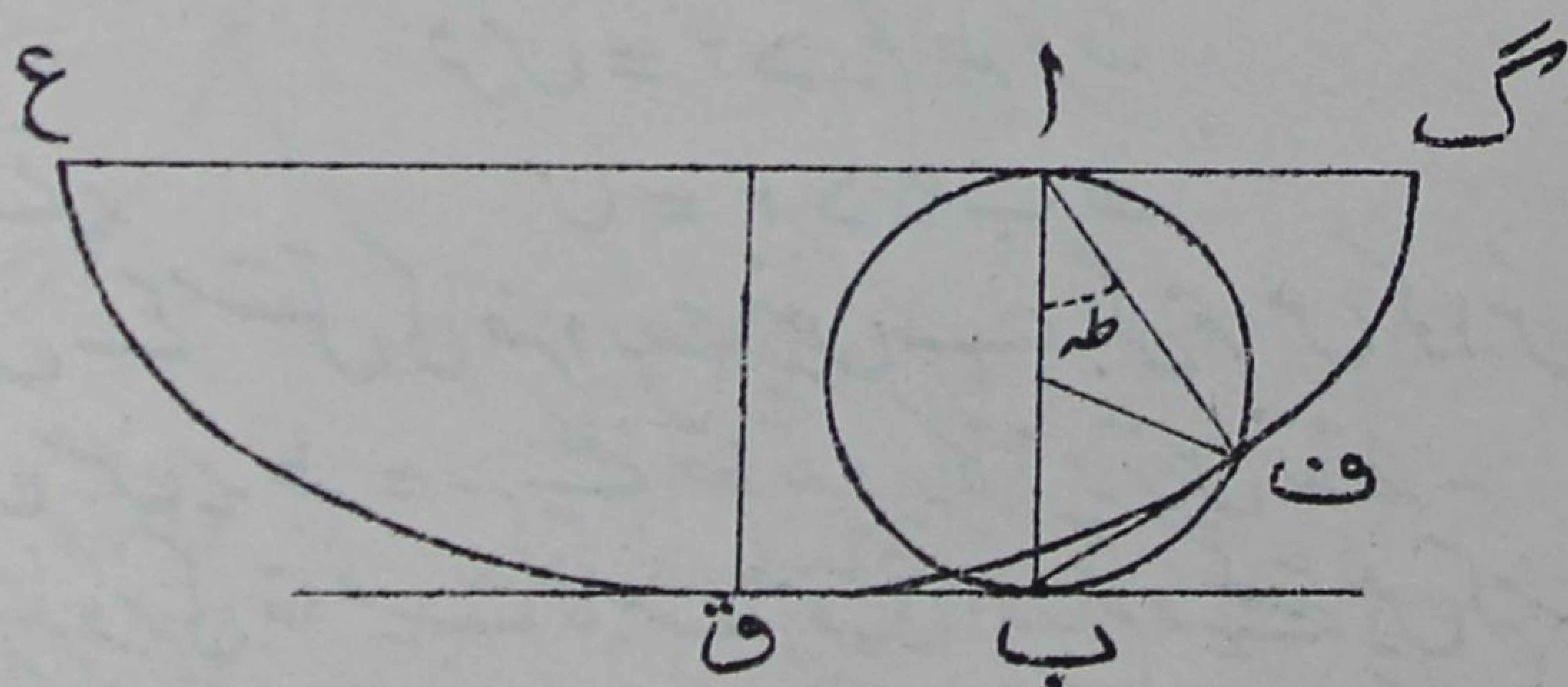
$$\frac{\text{ف}^2 \text{س}}{\text{ف ت}^2} = - \text{ج جب ط}$$

پر عود کرتے ہیں جو ایک ایسے ذرہ کی حرکت کی مساوات ہے جو کسی منحنی میں حرکت کرنے پر مجبور ہے اور ط وہ زاویہ ہے جو منحنی کے اُس نقطہ پر کا مماس افقی کے ساتھ بناتا ہے جسکا فاصلہ منحنی پر س ہے۔ یہ مساوات سادہ موسیقی حرکت کو تعبیر کرے گی اگر اسراع $\frac{\text{ف}^2 \text{س}}{\text{ف ت}^2}$، ـ ک^2 س کے مساوی ہو۔ اس لیے

$$\text{ج جب ط} = \text{ک}^2 \text{س}$$

اور اس لیے جب ط، س کے متناسب ہونا چاہئے۔

۲۱۱ — اِس ربط سے خط تدویر کی ایک خاصیت معلوم ہوتی ہے یعنے اُس منحنی کی جس کو ایک دائرہ کے محیط پر کا ایک نقطہ فضا میں مرتسم کرتا ہے جبکہ دائرہ ایک خط مستقیم پر لڑھک رہا ہو شکل (۱۳۲) میں فرض کرو کہ ایک خط تدویر ہے جو خط ع گ پر ایک دائرہ کے لڑھکنے سے بنا ہے ف کوئی نقطہ ہے۔



شکل (۱۳۲)

جب متحرک دائرہ کے محیط پر کا نقطہ ' ف ' پر ہو تو فرض کرو کہ دائرہ کا وہ نقطہ جو خط ع گ کو مس کرتا ہے ا ہے اور فرض کرو کہ ا میں سے گذرنیوالا قطر ا ب ہے۔

ہم جانتے ہیں کہ زیر بحث لمحہ پر دائرہ کے محیط پر کے نقطہ ف کی حرکت خط ا ف پر عمود وار ہے (دیکھو مثال ا صفحہ ۱۳)۔ چونکہ ا ف ب قائمہ زاویہ ہے اس لیے یہ حرکت ب ف پر ہونی چاہئے۔ اِس لیے ب ف خط تدویر کا مماس ہے۔ اگر ع گ کو افقی فرض کیا جائے تو ف پر کے مماس اور افقی کے درمیان زاویہ طہ زاویہ ف ا ب کے مساوی ہے' اور اِس لیے ف میں سے گذرنیوالا دائرہ کا نصف قطر انتصابی کے ساتھ زاویہ ۲ طہ بنائے گا۔ (۲۶۷)

فرض کرو کہ دائرہ ع گ پر لڑھکتا ہے تاآنکہ ف پر خط تدویر کا مماس افقی کے ساتھ زاویہ طہ + فرطہ بنائے۔ اب ف پر کے نصف قطر کو انتصابی کے ساتھ زاویہ ۲ (طہ + فرطہ) بنانا چاہیئے اور اس لیے دائرہ زاویہ ۲ فرطہ میں سے گردش کر چکا ہوگا۔ اب چونکہ ف کی حرکت کو ا کے گرد گردش کی حرکت سمجھا جا سکتا ہے اِس لئے راستہ کا وہ چھوٹا عنصر فرس جو ف سے مرتسم ہوتا ہے

فرس = ا ف × ۲ فرطہ

سے حاصل ہوگا۔

اب ا ف = ا ب جم طہ = د جم طہ جہاں د ' دائرہ کا قطر ہے۔

اس طرح

فرس = ۲ د جم طہ فرطہ

اور تکمل کرنے پر

س = ۲ د جب طہ

تکمل کے مستقل کی ضرورت نہیں ہے اگر ہم س کو اُس نقطہ سے پیمائش کریں جس پر طہ = ۰۔ یعنے خط تدویر کا زیر ترین نقطہ۔

خط تدویر کی خاصیت ثابت ہو چکی اور ہم دیکھتے ہیں کہ مساوات (۹۹) ایک نقطہ کی کل حرکت میں درست رہتی ہے جبکہ یہ نقطہ ایک خط تدویر

مرتسم کرتا ہے جس کی تکوین قطر د کے ایک دائرہ کے لڑھکنے سے ہوتی ہے جہاں

$$۲ د = \frac{ج}{ک^۲}$$

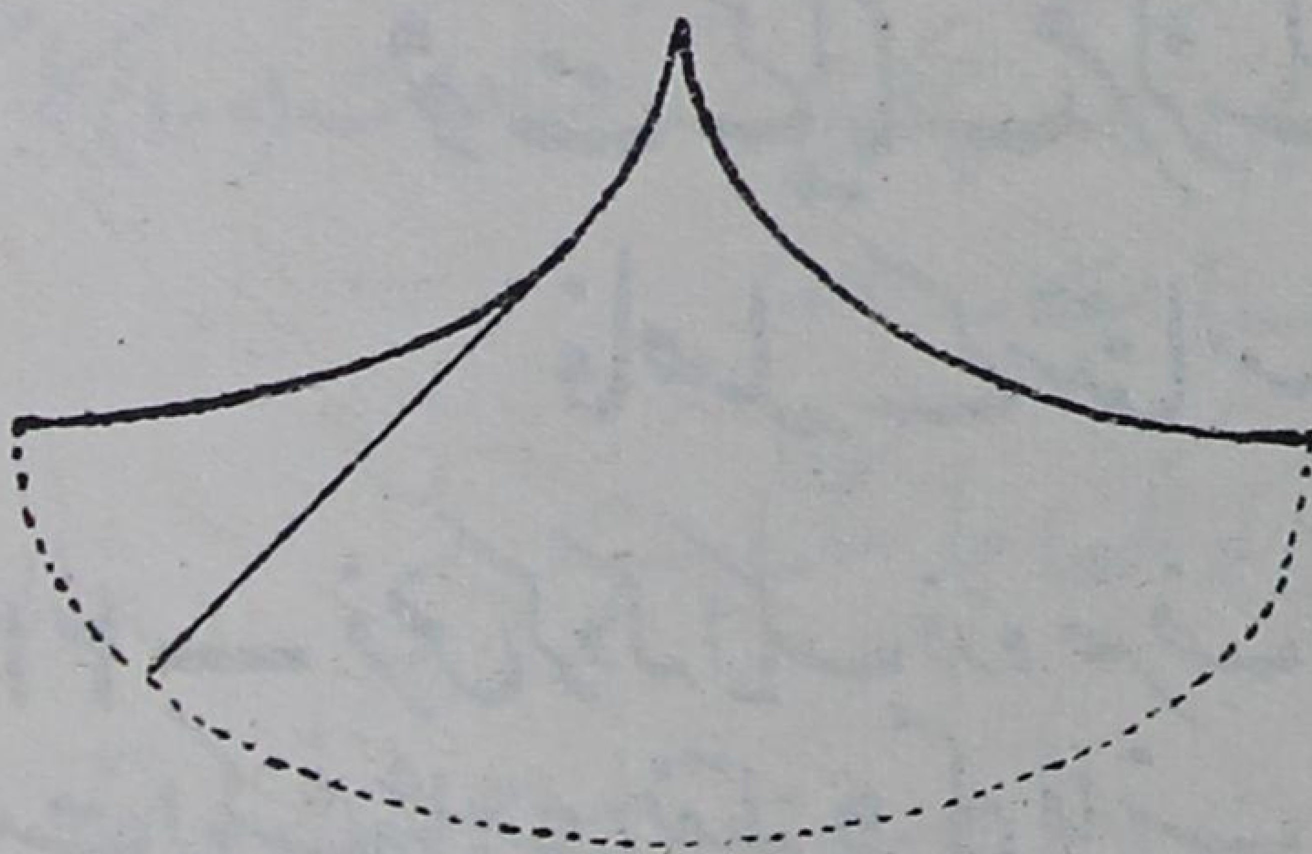
۲۱۲ — اگر خط تدویر دیا گیا ہو تو سادہ موسیقی حرکت کا تعدد ک، $\sqrt{\frac{ج}{۲ د}}$ کے مساوی ہوگا اور دَور $\frac{۲\pi}{ک}$ ہے یعنی

$$۲\pi \sqrt{\frac{۲ د}{ج}}$$

اِس لیے حرکت کا دَور وہی ہے جو طول ۲ د کے سادہ رقاص کا ہوتا ہے

۲۱۳ — تدویری حرکت کی اہمیت حسب ذیل ہے۔ ہم دیکھ چکے ہیں کہ ایک سادہ رقاص کی حرکت صرف اُس وقت سادہ موسیقی حرکت ہوتی ہے (۲۶۸) جبکہ حیطہ اِس قدر چھوٹا ہو کہ اس کو صغیر سمجھا جا سکے۔ محدود حیطوں کے لئے حرکت سادہ موسیقی نہیں ہوتی اور اِس لیے دَور اُس سادہ موسیقی حرکت کے دَور سے مختلف ہوتا ہے جو حیطہ کے بہت چھوٹا ہونے سے حاصل ہوتا ہے۔ پس دَور حیطہ پر منحصر ہوتا ہے، چنانچہ کوئی گھڑی جو صحیح ثانیوں کا ضربوں کے ذریعہ اظہار کرتی ہے جبکہ رقاص ایک زاویہ میں سے جھولے تیز یا سست ہوگی جبکہ رقاص کسی مختلف زاوئے میں سے جھولنے لگے۔ حیطہ کے تغیرات کسی رقاص کی حرکت کی اثناء میں ہمیشہ وقوع پذیر ہونے چاہئیں اور اِنکی وجہ سے گھڑی کی وقت نمائی میں بے قاعدگیاں پیدا ہوتی ہیں۔

لیکن ہم دیکھ چکے ہیں کہ اگر ایک ذرہ ایک خط تدویر مرتسم کرے تو دَور حیطہ پر منحصر نہیں ہوتا اور اِس لیے حیطہ کے تغیرات کسی ایسے ذرہ کی وقت نمائی کو متاثر نہیں کر سکتے۔



شکل (۱۳۳)

ذرہ کو ایک خط تدویر میں حرکت کرنے کے لیے مقید کرنے کا سادہ ترین طریقہ عملاً یہ ہے کہ اس کو ایک ثابت نقطہ سے ایک ڈوری کے ذریعہ اس طریقہ پر لٹکایا جاتا ہے کہ ذرہ کی حرکت میں ڈوری دو انتصابی رُخوں پر خود لپٹتی اور کھلتی جاتی ہے۔ اگر ان رُخوں کے منحنی کو ٹھیک طور پر منتخب کیا جائے تو ذرہ ایک خط تدویر مرتسم کرے گا اور یہ آسانی سے ثابت کیا جا سکتا ہے کہ ان رخوں کے منحنی دو تدویروں کے حصے ہونے چاہئیں جن میں سے ہر ایک اُس تدویر کے مساوی ہو جس کو ذرہ مرتسم کرتا ہے۔

مثالیں

۱۔ تدویری حرکت میں ثابت کرو کہ ذرہ کی رفتار کا انتصابی جزو ترکیبی بڑے سے بڑا ہوگا جبکہ وہ اپنے انتصابی اُتار کا نصف طے کر چکے۔

۲۔ ایک ذرہ جاذبہ کے تحت ایک خط تدویر میں اہتزاز کرتا ہے، حرکت کا حیطہ ب اور دور تہ ہے۔ ثابت کرو کہ سکون کے محل سے پیمائش شدہ وقت ت پر اس کی رفتار $\frac{2\pi ب}{تہ}$ جب $\frac{2\pi ت}{تہ}$ ہوگی۔

۳۔ کمیت ک کا ایک ذرہ ایک چکنے خط تدویر پر اس کے قرن سے پھسلنا شروع کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ کسی نقطہ پر دباؤ ۲ ک ج جم پہ ہے جہاں پہ، ذرہ کی حرکت کی سمت کا میلان اُفقی کے ساتھ ہے۔

قوت کے ایک مرکز کے گرد ذرہ کی حرکت

فاصلہ کے متناسب قوت

(۲۶۹)

۱۲۴ ۔ فرض کرو کہ ایک ذرہ صرف ایک تجاذبی قوت کے تحت جس کی سمت ایک ثابت نقطہ و کی جانب ہے اور جو و سے اس کے فاصلے کے متناسب ہے حرکت کرتا ہے اور کوئی دوسری قوتیں ذرہ پر عمل نہیں کرتیں۔

و کو مبداء لو اور فرض کرو کہ کسی لمحہ پر ذرہ کے محل ف کے محدد لا، ما، ی ہیں۔ فرض کرو کہ ذرہ پر عمل کرنے والی قوت مہ × و ف ہے جس کی سمت ف و ہے اور مہ ایک مستقل ہے۔ اِس قوت کے اجزائے ترکیبی محددوں کے محوروں کے متوازی

$$-\text{مہ لا}،\quad -\text{مہ ما}،\quad -\text{مہ ی}$$

ہیں اور اسراع کے اجزائے ترکیبی حسب دفعہ ۱۷۷

$$\frac{\text{فر}^{2}\,\text{لا}}{\text{فرت}^{2}}،\quad \frac{\text{فر}^{2}\,\text{ما}}{\text{فرت}^{2}}،\quad \frac{\text{فر}^{2}\,\text{ی}}{\text{فرت}^{2}}$$

ہیں۔

پس ذرہ کی حرکت کی مساواتیں حسب ذیل ہوتی ہیں:

$$\text{ک}\,\frac{\text{فر}^{2}\,\text{لا}}{\text{فرت}^{2}} = -\text{مہ لا}، \qquad (100)$$

$$\text{ک}\,\frac{\text{فر}^{2}\,\text{ما}}{\text{فرت}^{2}} = -\text{مہ ما}، \qquad (101)$$

$$\text{ک}\,\frac{\text{فر}^{2}\,\text{ی}}{\text{فرت}^{2}} = -\text{مہ ی} \qquad (102)$$

یہ تین مساواتیں ایک ہی نمونے کی ہیں یعنے اُس نمونے کی جو سادہ موسیقی حرکت کو تعبیر کرتا ہے۔ اِس لیے اُس عمود کا پائین جو متحرک ذرہ سے محددوں کے محوروں میں سے کسی ایک پر کھینچا گیا ہو سادہ موسیقی حرکت کے ساتھ حرکت کرتا ہے۔ ہم دیکھ چکے ہیں کہ مساوات (۱۰۰) کا حل

$$\text{لا} = \text{ا جم ف (ت} - \text{صہ)}$$

ہے جہاں $\text{ف}^{2} = \frac{\text{مہ}}{\text{ک}}$۔ اس کو لکھا جا سکتا ہے

$$\text{لا} = \text{ا جم ف صہ جم ف ت} + \text{ا جب ف صہ جب ف ت}$$

یا

$$\text{لا} = \text{ج جم ف ت} + \text{د جب ف ت}$$

(۲۷۰) جہاں ج اور د نئے مستقل ہیں جو ا جم ف صہ اور ا جب ف صہ کی جگہ رکھے گئے ہیں ۔ دوسری دو مساواتوں کے حل اسی کے مشابہ ہیں اور اس لیے مکمل حل حسب ذیل ہے :

لا = ج جم ف ت + د جب ف ت (۱۰۳)

ما = جَ جم ف ت + دَ جب ف ت (۱۰۴)

ی = جً جم ف ت + دً جب ف ت (۱۰۵)

ہم ہمیشہ مساواتوں

ج + ر جَ + س جً = ۰ (۱۰۶)

د + ر دَ + س دً = ۰ (۱۰۷)

کو حل کر سکتے ہیں اور ر اور س کی ایسی قیمتیں حاصل کر سکتے ہیں جو اِن مساواتوں کو پورا کرتی ہیں ۔ فرض کرو کہ ہم مساواتوں (۱۰۴) اور (۱۰۵) کو ر اور س کی اِن قیمتوں سے ضرب دیتے ہیں اور متناظر طرفوں کو مساوات (۱۰۳) کی متناظر طرفوں میں جمع کرتے ہیں ۔ اس طرح حاصل ہوتا ہے

(لا + ر ما + س ی) = (ج + ر جَ + س جً) جم ف ت
+ (د + ر دَ + س دً) جب ف ت = ۰ (۱۰۸)

کیونکہ مساواتیں (۱۰۶) اور (۱۰۷) پوری ہوتی ہیں ۔ مساوات (۱۰۸) کے یہ معنے ہیں کہ ت کی تمام قیمتوں کے لیے ربط لا + ر ما + س ی = ۰ درست ہے اور اس لیے ذرہ کی پوری حرکت میں وہ اُس مُستوی میں رہتا ہے جس کی یہ مساوات ہے ۔

محددوں کے محور اختیاری طور پر منتخب ہوئے ہیں ۔ ہم ہمیشہ اِن محوروں کو اِس طور پر منتخب کر سکتے ہیں کہ وہ مُستوی جس میں پوری حرکت وقوع پذیر ہوتی ہے لا ما کا مُستوی ہو ۔ تب حرکت حسب ذیل دو مساواتوں سے معلوم ہوگی :

لا = ج جم ف ت + د جب ف ت ،

ما = جَ جم ف ت + دَ جب ف ت

اِن مساواتوں کو جب ف ت اور جم ف ت کے لیے حل کرنے سے

$$\text{جب ف ت} = \frac{\text{جَ لا} - \text{ج ما}}{\text{جَ د} - \text{ج دَ}}$$

$$\text{جم ف ت} = \frac{\text{دَ لا} - \text{د ما}}{\text{جَ د} - \text{ج دَ}}$$

اس لئے مربع لینے اور جمع کرنے سے

$$(\text{جَ لا} - \text{ج ما})^2 + (\text{دَ لا} - \text{د ما})^2 = (\text{جَ د} - \text{ج دَ})^2$$ (۲۷۱)

یہ قطع ناقص کی مساوات ہے۔

اِس لئے وہ عام ترین حرکت جو ذرہ کے لیے ممکن ہے ایک ہی قطع ناقص کو بار بار مرتسم کرنے پر مشتمل ہوتی ہے۔ اِس حرکت کا دور

$\frac{2\pi}{\text{ف}}$ ہے اور یہ وہ وقت ہے جو جم ف ت اور جب ف ت کو اپنی قیمتیں دُہرانے کے لیے مطلوب ہوتا ہے۔

۲۱۵ — محاور لا، ما ابتک غیر متعین ہیں۔ فرض کرو کہ ہم انہیں قطع ناقص کے صدر محاور خیال کرتے ہیں۔

اب اگر ہم فرض کریں کہ وقت کی پیمائش اُس لمحہ سے کی گئی ہے جس پر ذرہ محور اعظم کے سروں میں سے ایک پر تھا تو ہمیں شکل ذیل کی مساواتیں حاصل ہوں گی:۔

لا = ا جم ف ت،

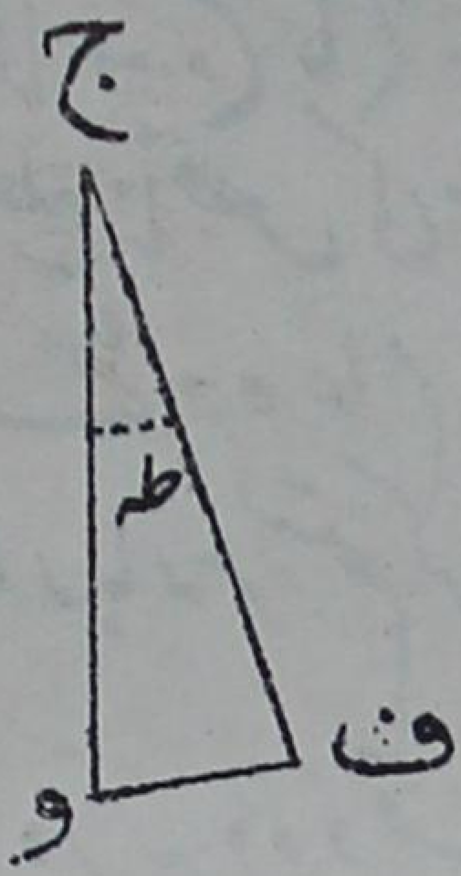
ما = ب جب ف ت

اس طرح ذرہ جس قطع ناقص کو مرتسم کرتا ہے اس کا خارج المرکز زاویہ ف ت ہے اور اس لیے یہ زاویہ یکساں زاوئی رفتار ف یا $\sqrt{\frac{\text{مـ}}{\text{ک}}}$ کے ساتھ بڑھتا ہے۔ حرکت تکرار پاتی ہے جب، ف ت، ۲ π تک بڑھ جاتا ہے

اِس لئے تعدد ف یا $\sqrt{\frac{\text{مہ}}{\text{ک}}}$ ہے اور دَور $2\pi\sqrt{\frac{\text{ک}}{\text{مہ}}}$ ہے۔

۲۱۶ — اِس حرکت کی مثال اُس رقاص کی حرکت سے ملسکتی ہے جو ایک انتصابی مستوی میں حرکت کرنے پر مجبور نہ ہو لیکن انتصابی سے اِس کے انحراف چھوٹے ہوں۔

فرض کرو کہ رقاص کا طول ا ہے اور فرض کرو کہ اس کا لنگر اپنے توازن کے محل و سے قریب کے محل ف تک ہٹا ہے اتنا کہ زاویہ ف ج و کو چھوٹا سمجھا جاسکتا ہے۔



شکل (۱۳۴)

اِس زاویہ کو ط سے تعبیر کرو تو لنگر کے وزن کو دو اجزائے ترکیبی میں تحلیل کیا جاسکتا ہے، (۱) ک ج جم ط سمت ج ف میں (۲) ک ج جب ط سمت ف و میں۔ (۱) کی تعدیل ڈوری کے تناؤ سے ٹھیک طور پر ہو جاتی ہے۔ پس (۲) میں اگر ط چھوٹا ہے تو جب ط کو ط کے مساوی اور اِس لیے $\frac{\text{و ف}}{\text{ا}}$ کے مساوی رکھا جا سکتا ہے۔ اِس لیے لنگر پر ایک قوت $\frac{\text{ک ج}}{\text{ا}}$ و ف سمت و ف میں عمل کرتی ہوئی فرض کی جاسکتی ہے۔ اِس لیے حرکت اُس قسم کی ہے جس کو اوپر بیان کیا گیا ہے، مہ کی قیمت $\frac{\text{ک ج}}{\text{ا}}$ ہے اور اِس لئے ف کی قیمت $\sqrt{\frac{\text{ج}}{\text{ا}}}$ ہے۔ اِس طرح ہم دیکھتے ہیں کہ اگر کسی لٹکے ہوئے وزن کو اس کے توازن کے محل سے ہٹا کر کسی طریقہ پر پھینکا جائے تو وہ ہمیشہ اُس افقی مستوی میں ایک قطع ناقص مرتسم کرے گا جس میں وہ حرکت کرنے میں آزاد ہے اور وہ نقطہ اِس

(۲۷۲)

قطع ناقص کا مرکز ہوگا جو اُس نقطہ کے عین نیچے ہے جس سے وزن لٹکایا گیا ہے۔

انگلستان کے دیہاتی میلوں میں بعض اوقات ایک ایسا انتظام دیکھا جا سکتا ہے جس میں تماشہ گر بڑی ہوشیاری سے اِس نتیجہ سے فائدہ اٹھاتا ہے۔ ایک وزن ایک ڈوری سے لٹکا ہوا ہوتا ہے اور فرش پر ٹھیک اُس نقطہ کے نیچے جس سے وزن لٹکا ہوا ہے ایک اسکیٹل (لکڑی کی چھوٹی میخ) رکھی ہوتی ہے تماشہ گر تماش بینوں سے کہتا ہے: آؤ، داخلہ کی فیس دیکر اندر آؤ اور انعام کیلئے ایک مقابلہ میں شریک ہو جو اُس شخص کو دیا جائے گا جو وزن کو اِس طریقہ سے پھینکے کہ وہ واپس ہوتے ہوئے اسکیٹل سے ٹکرائے۔ بلاشبہ یہ مسئلہ اُتنا ہی ناممکن ہے جتنا ایک ایسے قطع ناقص کو بنانے کا ہے جو خود اپنے مرکز میں سے گذرتا ہو۔

۲۱۷ — ایک اور طریقہ جس کے ذریعہ متذکرۂ بالا حرکت کی مثال مِلسکتی ہے حسب ذیل ہے: طبعی طول ل کی ایک لچکدار ڈوری کے ایک سرے سے ایک چھوٹا ذرہ بندھا ہوتا ہے اور یہ ذرہ ایک چکنی افقی میز پر حرکت کرنے میں آزاد رہتا ہے۔ ڈوری کا دوسرا سرا میز کے ایک چھوٹے سوراخ میں سے گذرتا ہے اور ایک ثابت نقطے سے جس کا فاصلہ سوراخ سے ل ہے بندھا ہوتا ہے۔ اگر ذرہ کو سوراخ سے فاصلہ ر تک کھینچا جائے تو ڈوری کا کُل طول ل + ر ہوگا اور اِس لیے اِس کا تناؤ $\frac{ر}{ل}$ له ہوگا جہاں له لچک کا مقیاس ہے۔ اِس لیے ذرہ پر عمل کرنے والی قوت یعنی ڈوری کا تناؤ اُس فاصلے کے متناسب ہے جو ذرہ کا ایک ثابت نقطہ یعنی سوراخ سے ہے اور اِس قوت کی سمت سوراخ کی جانب ہے۔ اِس کو چھوڑ دینے پر ذرہ میز پر ایک قطع ناقص میں حرکت کرے گا۔

مثالیں

۱۔ نقطہ ف ایک قطع ناقص کو ایک تجاذبی قوت کے تحت جس کی

سمت مرکز کی جانب ہے مرتسم کر رہا ہے اور امدادی دائرہ پر متناظر نقطہ ف ہے۔ ثابت کرو کہ ف اس امدادی دائرہ کے گرد یکساں رفتار سے حرکت کرتا ہے۔

۲۔ ایک ذرہ قوت کے ایک مرکز کے گرد ایک قطع ناقص مرتسم کرتا ہے، کشش راست فاصلے کے متناسب ہے۔ ثابت کرو کہ قطع ناقص کے مرکز سے ذرہ تک جو سمتی نصف قطر کھینچا جائے وہ مساوی اوقات میں مساوی رقبے مرتسم کرتا ہے۔

۳۔ ایک ذرہ ایک قوت کے تحت جو فاصلے کے متناسب ہے ایک قطع ناقص مرتسم کر رہا ہے، اس پر ناقص کے محور اعظم کی متوازی سمت میں ایک دھکہ پڑتا ہے۔ ثابت کرو کہ نئے مدار کا محور اصغر وہی ہے جو پرانے مدار کا تھا اور بتاؤ کہ محور اعظم میں پیدا شدہ تبدیلی کس طرح معلوم کی جا سکتی ہے۔

(۲۷۳) ۴۔ ایک ذرہ قوت کے متعدد مرکزوں کی کششوں کے زیر عمل ہے جن میں سے ہر کشش فاصلے کے متناسب ہے۔ ثابت کرو کہ ذرہ ایک قطع ناقص مرتسم کرتا ہے۔

اس حرکت کی تمثیل کے لیے میکانیکی نمونہ کس طرح بنایا جا سکتا ہے۔

۵۔ ایک ذرہ ایک دفاعی قوت کے زیر عمل ہے جو قوت کے مرکز سے اس کے فاصلے کے متناسب ہے۔ ثابت کرو کہ ذرہ ایک قطع زائد مرتسم کرتا ہے۔

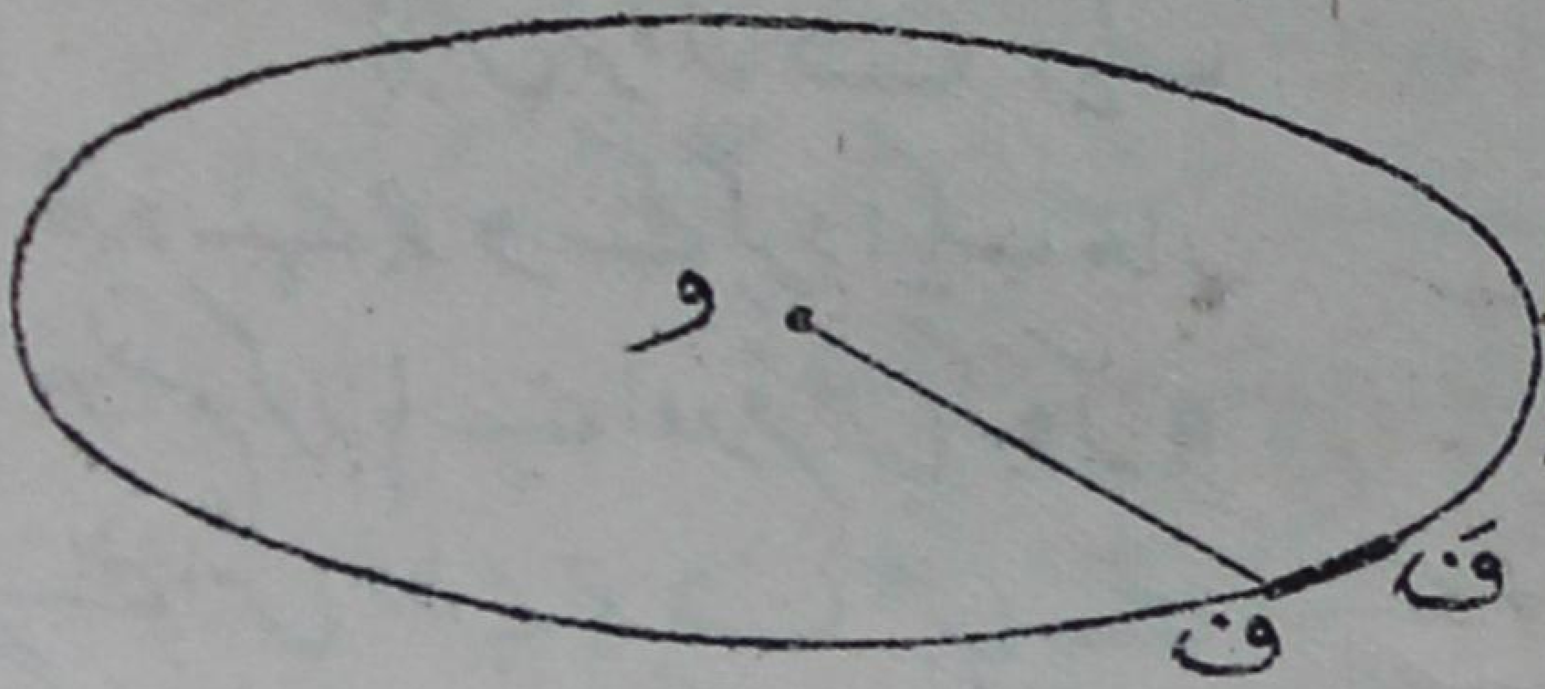
۶۔ مثال ماسبق میں ثابت کرو کہ ذرہ اور قوت کے مرکز کو ملانے والا سمتی نیم قطر مساوی اوقات میں مساوی رقبے مرتسم کرتا ہے۔

قوت کے ایک مرکز کے گرد حرکت کا عام نظریہ

۲۱۸ — فرض کرو کہ ایک ذرہ ہے جس پر صرف ایک قوت عمل کرتی ہے جس کی سمت قوت کے ایک ثابت مرکز کی جانب ہے اور اس قوت کی مقدار اس فاصلہ کا کوئی تفاعل ہے جو ذرہ کا ثابت مرکز سے ہے۔

فرض کرو کہ قوت کا مرکز و ہے اور کسی لمحہ پر ذرہ کا محل ف ہے

اور اِس لمحہ پر ذرہ کی رفتار کی سمت ف فَ ہے۔ اب مُستوی و ف فَ
میں ذرہ کی رفتار اور نیز اِس کا اسراع واقع ہیں، رفتار ف فَ پر اور
اور اسراع ف و پر ہے۔ پس کسی چھوٹے وقفہ کے بعد ذرہ کی رفتار
پھر بھی مُستوی و ف فَ میں
ہوگی۔ نیز ذرہ بھی اُسی مُستوی
میں ہوگا (فرض کرو نقطہ فَ پر)
اور اس لیے اسراع بھی جو فَ و
پر ہے اُسی مُستوی میں ہوگا۔
اِسی طرح ہم ثابت کر سکتے
ہیں کہ ایک اور چھوٹے وقفہ کے



شکل (۱۳۵)

بعد ذرہ کا محل، رفتار، اور اسراع سب کے سب مستوی و ف فَ میں
ہوں گے اور علیٰ ہذا اِس عمل کو جہاں تک چاہیں جاری رکھا جا سکتا ہے۔
اِس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ ذرہ مستوی و ف فَ کو کبھی بھی
نہیں چھوڑے گا اور اس لئے حسب ذیل مسئلہ حاصل ہوتا ہے:

وہ مدار جس کو ایک ذرہ قوت کے ایک ثابت مرکز کے گرد مرتسم کرتا ہے کُلاً ایک مُستوی میں واقع ہوتا ہے۔

دفعہ ۱۱۴ میں اس مسئلہ کی ایک تمثیل دیجا چکی ہے۔ یہ تمثیل اُس مدار سے
متعلق ہے جس کو ذرہ ایسی کشش کے تحت مرتسم کرتا ہے جو مرکز سے فاصلہ کے متناسب ہے

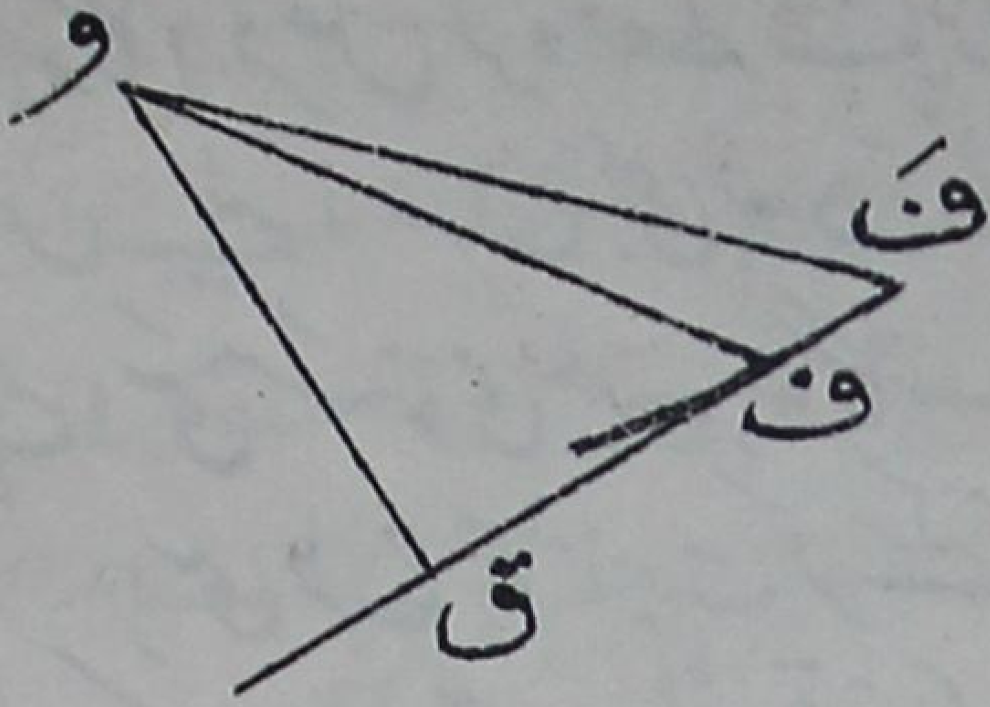
(۲۷۴)

رفتار کا معیار

۲۱۹ — کسی نقطہ کی رفتار ایک سمتی ہے اور اِس سمتی کے خط عمل کو وہ
خط سمجھا جا سکتا ہے جو متحرک نقطہ میں سے اِس کی رفتار کی سمت میں
کھینچا گیا ہو۔ ہم رفتار کے معیار کی عین اُسی طریقہ پر تعریف کر سکتے ہیں
جس طریقہ پر قوت کے معیار کی تعریف کی جا چکی ہے۔ مزید برآں قوت کے

معیاروں کے تمام خواص اس واقعہ سے مستنبط کئے گئے تھے کہ قوتوں کو قانون متوازی الاضلاع کی بموجب مرکب کیا جا سکتا ہے اور اس لیے وہی خواص رفتاروں کے معیاروں کے لیے بھی درست ہوں گے کیونکہ رفتاروں کو بھی قانون متوازی الاضلاع کی بموجب مرکب کیا جا سکتا ہے۔

فرض کرو کہ ف ایک ذرہ ہے جو و کے گرد ایک مدار مرتسم کر رہا ہے اور فرض کرو کہ و سے اس خط پر جو ف میں سے گذرتا ہے اور ذرہ کی رفتار کی سمت میں کھینچا گیا ہے عمود وق نکالا گیا ہے۔ پس ذرہ کی رفتار کا معیار و کے گرد وق × (ذرہ کی رفتار) ہے۔



شکل (۱۳۶)

فرض کرو کہ وقت کے چھوٹے وقفہ فرت کے بعد ذرہ فَ پر ہے۔ فَ پر اس کی رفتار، ف پر اس کی رفتار اور ف پر اس کے اسراع کے فرت گنا سے مرکب ہے۔ اس لیے

(فَ پر رفتار کا معیار و کے گرد)

= (ف پر رفتار کا معیار و کے گرد)

+ [(فرت × ف کا اسراع) کا معیار و کے گرد]

ف پر اسراع کی سمت ف و ہے اور اس لیے اس مساوات کی آخری رقم صفر ہے اور اس لیے ہم دیکھتے ہیں کہ ف اور فَ پر کی رفتاروں کے معیار و کے گرد مساوی ہیں۔

ہم اس کی توسیع پچھلے مسئلہ کی طرح نقطہ بہ نقطہ کر سکتے ہیں اور بالآخر حسب ذیل مسئلہ پر پہنچتے ہیں:

اگر ایک ذرہ، و کے گرد ایک مدار مرتسم کر رہا ہو تو ذرہ کی

رفتار کا معیار و کے گرد مستقل ہوتا ہے۔

۲۲۰ – ہم نے فرض کیا ہے کہ ذرہ ف سے فَ تک وقت فرت میں حرکت کرتا ہے اور اس لیے ف پر اس کی رفتار و ہو تو ف فَ = و فرت۔ جب ذرہ اپنا مدار مرتسم کرتا ہے تو اس اثناء میں خط و ف مدار کے مستوی میں ایک رقبہ مرتسم کرتا ہے۔ وقت فرت میں مرتسم شدہ رقبہ چھوٹے مثلث و ف فَ کا رقبہ ہے۔ چنانچہ (۲۷۵)

وقت فرت میں مرتسم شدہ رقبہ

= رقبہ و ف فَ

= $\frac{1}{2}$ وق × ف فَ

= $\frac{1}{2}$ وق × و فرت

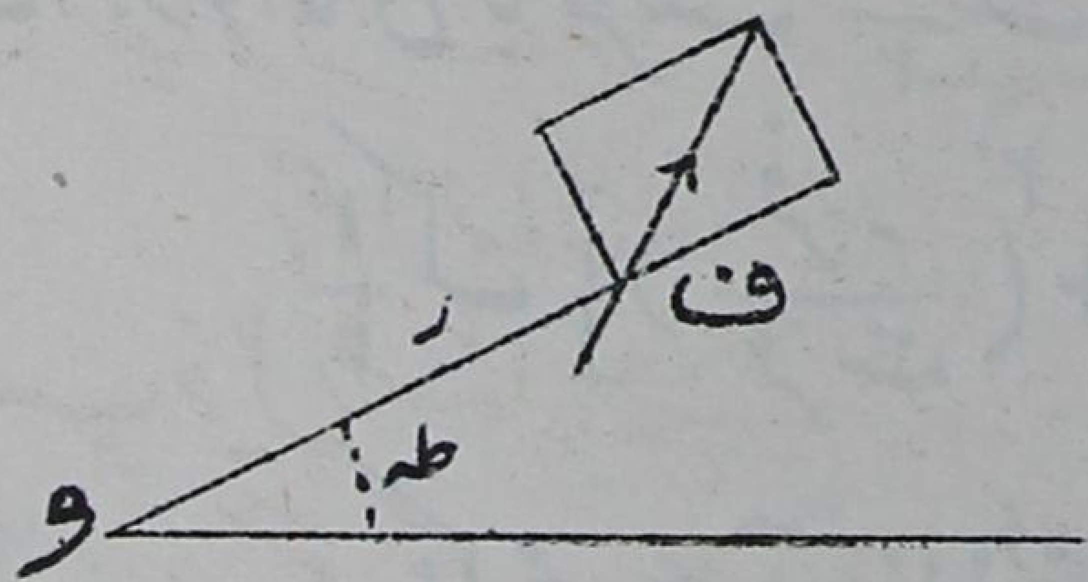
= $\frac{1}{2}$ فرت × رفتار کا معیار و کے گرد

پس فی اکائی وقت مرتسم شدہ رقبہ، و کے گرد رفتار کے معیار کا نصف ہے اور پچھلے دفعہ کی رو سے یہ مستقل ہے۔ اس لیے حسب ذیل مسئلہ حاصل ہوتا ہے:

مساوی رقبے مساوی وقتوں میں مرتسم ہوتے ہیں۔

مدار کی تفرقی مساوات

۲۲۱ – اوپر کے ثابت شدہ مسئلہ اور توانائی کے بقاء کے مسئلہ کو ایک ساتھ لینے سے ہم اس مدار کی مساوات معلوم کر سکتے ہیں جس میں ذرہ حرکت کرتا ہے۔ اس مساوات کو سب سے زیادہ سہولت کے ساتھ قطبی محددوں میں بیان کیا جا سکتا ہے جبکہ قوت کے



شکل (۱۳۷)

مرکز کو مبداء فرض کیا گیا ہو۔

اگر ذرہ کے محدد ر، طہ ہوں تو رفتار کو دو رفتاروں کا مرکب خیال کیا جا سکتا ہے (۱) رفتار $\frac{\text{فرر}}{\text{فرت}}$ سمت **وف** میں، (۲) رفتار $\frac{\text{فرطہ}}{\text{فرت}}$ سمت **وف** کے علی القوائم۔

اِس لیے رفتار

$$\text{ع}^2 = \left(\frac{\text{فرر}}{\text{فرت}}\right)^2 + \text{ر}^2\left(\frac{\text{فرطہ}}{\text{فرت}}\right)^2$$

سے حاصل ہوتی ہے۔

و کے گِرد رفتار کا معیار دوسرے جزو ترکیبی کے معیار کے مساوی ہے کیونکہ پہلے جزو ترکیبی کا معیار معدوم ہوتا ہے۔ اس لئے و کے گِرد رفتار کا معیار ر × ر $\frac{\text{فرطہ}}{\text{فرت}}$ ہے اور چونکہ اِس کی قیمت مستقل ہے (فرض کرو ھ) اِس لیے حاصل ہوتا ہے:

$$\text{ر}^2 \frac{\text{فرطہ}}{\text{فرت}} = \text{ھ} \qquad (۱۰۹)$$

(۲۷۶) اگر ذرہ کی کمیت ک ہو اور اگر فی اکائی کمیت کشش ف (ر) ہو جبکہ ذرہ و سے فاصلہ ر پر ہے تو ذرہ کی توانائی بالقوہ

$$\text{ک} \int \text{ف (ر) فرر}$$

ہے اور توانائی بالحرکت $\frac{1}{2}$ک ع^2 یا

$$\frac{1}{2}\text{ک}\left[\left(\frac{\text{فرر}}{\text{فرت}}\right)^2 + \text{ر}^2\left(\frac{\text{فرطہ}}{\text{فرت}}\right)^2\right]$$

ہے۔ اب چونکہ مجموعی توانائی مستقل ہوتی ہے اس لیے

$$\left(\frac{\text{فر ر}}{\text{فر ت}}\right)^{2} + \text{ر}^{2}\left(\frac{\text{فر طہ}}{\text{فر ت}}\right)^{2} + 2\int \text{ف (ر) فر ر} = \text{ع} \qquad (110)$$

جہاں ع مستقل ہے۔

مساواتوں (۱۰۹) اور (۱۱۰) سے مدار کی تفرقی مساوات حاصل ہوتی ہے۔ چونکہ ر اور طہ دونوں ت کے تفاعل ہیں اس لیے

$$\frac{\text{فر ر}}{\text{فر ت}} = \frac{\text{فر ر}}{\text{فر طہ}}\,\frac{\text{فر طہ}}{\text{فر ت}}$$

اور اس لیے مساوات (۱۱۰) کو شکل

$$\left[\left(\frac{\text{فر ر}}{\text{فر طہ}}\right)^{2} + \text{ر}^{2}\right]\left(\frac{\text{فر طہ}}{\text{فر ت}}\right)^{2} + 2\int \text{ف (ر) فر ر} = \text{ع}$$

میں بیان کیا جا سکتا ہے۔ اور پھر اس مساوات اور (۱۰۹) سے $\frac{\text{فر طہ}}{\text{فر ت}}$ کو ساقط کرنے سے مدار کی تفرقی مساوات

$$\left[\left(\frac{\text{فر ر}}{\text{فر طہ}}\right)^{2} + \text{ر}^{2}\right]\frac{\text{ھ}^{2}}{\text{ر}^{4}} + 2\int \text{ف (ر) فر ر} = \text{ع} \qquad (111)$$

حاصل ہوتی ہے۔

معکوس مربع کا قانون

۲۲۲ — اب فرض کرو کہ کشش، فاصلے کے معکوس مربع کے قانون کے تابع ہے اور اس لیے

$$\text{ف (ر)} = \frac{\text{مہ}}{\text{ر}^{2}}$$

جہاں مہ مستقل ہے۔ تب

$$\int \text{ف (ر) فر ر} = -\frac{\text{مہ}}{\text{ر}} \qquad (112)$$

(۲۷۷) اور مساوات (۱۱۱) ہو جاتی ہے

$$ع = \frac{ھ^2}{ر^4}\left[\left(\frac{فر ر}{فر طہ}\right)^2 + ر^2\right] - \frac{2\,مہ}{ر}$$

اس لیے حاصل ہوتا ہے

$$فر طہ = \frac{ھ\, فر ر}{ر\sqrt{ع\, ر^2 + 2\, مہ\, ر - ھ^2}}$$

اور تکمل کرنے سے

$$طہ = جب^{-1}\frac{\frac{ھ}{ر} - \frac{مہ}{ھ}}{\sqrt{ع + \frac{مہ^2}{ھ^2}}} + صہ$$

جہاں صہ تکمل کا مستقل ہے۔

مختصر کرنے پر

$$\frac{ھ}{ر} - \frac{مہ}{ھ} = \sqrt{ع + \frac{مہ^2}{ھ^2}}\; جب\,(طہ - صہ) \qquad (۱۱۳)$$

اور اگر ہم مساوات

$$\frac{ل}{ر} - ۱ = ز\, جم\, طہ$$

کے ساتھ اِس کا مقابلہ کریں تو ہم دیکھتے ہیں کہ مساوات (۱۱۳) ایک مخروطی کو تعبیر کرتی ہے جس کا ماسکہ مبداء ہے اور وتر خاص $ل = \frac{ھ^2}{مہ}$ اور خروج المرکز $ز = \sqrt{1 + \frac{ع\, ھ^2}{مہ^2}}$ خط طہ = ۰ کو مخروطی کے محور اعظم پر منطبق کرنے کے لیے صہ کی قیمت کو $-\frac{\pi}{2}$ کے مساوی رکھنا چاہئے۔

۲۲۳ — ہم دیکھتے ہیں کہ اگر

ع مثبت ہو تو ز > ۱ اور مدار قطع زائد ہے،

ع صفر ہو تو ز = ۱ اور مدار قطع مکافی ہے،

ع منفی ہو تو ز < ۱ اور مدار قطع ناقص ہے۔

اس لئے مرتسم شدہ مخروطی کی قسم صرف ع کی قیمت پر منحصر ہوتی ہے اور ھ کی قیمت پر منحصر نہیں ہوتی۔ یہ معلوم رہے کہ اگر وہ نقطہ معلوم ہو جس سے ذرہ پھینکا گیا ہے اور نیز پھینکتے وقت ذرہ کی رفتار بھی معلوم ہو تو ع کی قیمت متعین ہو جاتی ہے کیونکہ مساوات (۱۱۰) کی رو سے

$$\text{ع} = \text{و}^{۲} - \frac{۲\,\text{مہ}}{\text{ر}} \qquad (۲۷۸)$$

پس مرتسم شدہ مخروطی کی قسم صرف پھینکنے کی رفتار پر منحصر ہوتی ہے اور سمت پر منحصر نہیں ہوتی۔ مخروطی ایک قطع زائد، قطع مکافی، یا قطع ناقص ہوگا بموجب اس کے کہ

$$\text{و}^{۲} > = \text{یا} < \frac{۲\,\text{مہ}}{\text{ر}}$$

اصلی خروج المرکز، ع اور ھ دونوں پر منحصر ہوتا ہے کیونکہ اگر ز خروج المرکز ہو تو

$$\text{ز}^{۲} = ۱ + \frac{\text{ع}\,\text{ھ}^{۲}}{\text{مہ}^{۲}}$$

۲۲۴ — اگر ذرہ کو ایک دائرہ مرتسم کرنا ہے تو حاصل ہونا چاہیے $\text{ز}^{۲} = ۰$ اور اس لئے

$$۱ + \frac{\text{ع}\,\text{ھ}^{۲}}{\text{مہ}^{۲}} = ۰$$

اب $\text{ع} = \text{و}^{۲} - \frac{۲\,\text{مہ}}{\text{ر}}$ اور $\text{ھ} = \text{ف}\,\text{و}$ رکھنے سے (اس لئے ف وہ عمود ہے جو قوت کے مرکز سے پھینکنے کی سمت پر کھینچا گیا ہے) مساوات بالا

$$\frac{\text{مہ}^2}{\text{ف}^2} - \frac{2\,\text{مہ}}{\text{ر}}\,\text{و}^2 + \text{و}^4 = 0$$

یا $$\left(\text{و}^2 - \frac{\text{مہ}}{\text{ر}}\right)^2 + \text{مہ}^2\left(\frac{1}{\text{ف}^2} - \frac{1}{\text{ر}^2}\right) = 0$$

میں تحویل ہوتی ہے۔

چونکہ ف، ر سے بڑا نہیں ہو سکتا اس لیے اِن دو رقموں میں سے کوئی منفی نہیں ہو سکتی۔ اس لیے اِس مساوات کے پورا ہونے کے لیے دونوں رقمیں معدوم ہونی چاہئیں اور حاصل ہونا چاہیے

$$\text{ف} = \text{ر} \quad \text{اور} \quad \text{و}^2 = \frac{\text{مہ}}{\text{ر}}$$

پہلی مساوات سے ظاہر ہے کہ ذرہ کو پھینکنے کی سمت اُس خط کے علی القوائم ہونی چاہیے جو ذرہ کو قوت کے مرکز سے ملاتا ہے۔ دوسری مساوات جس کو شکل

$$\frac{\text{و}^2}{\text{ر}} = \frac{\text{مہ}}{\text{ر}^2}$$

میں لکھا جا سکتا ہے اِس امر کو ظاہر کرتی ہے کہ تجاذبی قوت کو عین اتنا اسراع پیدا کرنا چاہیے جو نصف قطر ر کے ایک دائرہ میں حرکت کے لیے مناسب ہے۔

(۲۷۹) **225** — ناقصی مدار کے لیے مدت دَوران وہ ہے جو رقبہ π ا ب مرتسم کرنے کے لیے مطلوب ہوتی ہے جہاں ا، ب، ناقص کے نیم محور ہیں۔ چونکہ رقبہ بشرح $\frac{1}{2}$ ھ فی اکائی وقت سے مرتسم ہوتا ہے اس لیے مدت دَوران ت

$$\text{ت} = \frac{\pi\,\text{ا ب}}{\frac{1}{2}\,\text{ھ}}$$

ہوگی لیکن نیم وترخاص ل = $\frac{\text{ب}^2}{\text{ا}}$ اور نیز = $\frac{\text{ھ}^2}{\text{مہ}}$، اس لیے

$$\text{ب} = \sqrt{\text{ا ل}} = \text{ھ}\sqrt{\frac{\text{ا}}{\text{مہ}}}$$

اِس لیے

$$\text{ت} = \frac{2\pi\,\text{ا ب}}{\text{ھ}} = \frac{2\pi\,\text{ا}^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\text{مہ}}} \qquad (114)$$

چونکہ ت، خروج المرکز پر منحصر نہیں ہے اِس لیے یہ ظاہر ہے کہ کسی مدار کی مدت دوران وہی ہے جو اُس دائری مدار کی ہے جس کا نصف قطر نیم محور اعظم کے مساوی ہو۔

۲۲۶ — معکوس مربع کا قانون تجاذب کا قانون ہے، اِس لیے وہ قانون جس کی تحقیق میں ہم مصروف تھے وہ ہے جس کے تحت سورج کے گرد سیارے اپنے مداروں میں اور نیز شہاب اور دمدار ستارے حرکت کرتے ہیں۔ ان اسباب کی تشریح یہاں نہیں کی جا سکتی جن کی بناء پر سیاروں سے مُرتسم شدہ مخروطی سب کے سب چھوٹے خروج المرکز کے قطعات ناقص ہیں۔ دُمدار ستاروں کے مداروں میں زیادہ وسعت پائی جاتی ہے۔ یہ اجرام بالعموم نظام شمسی کے باہر بہت دُور سے آتے ہیں۔ تقریبی طور پر ہم سمجھ سکتے ہیں کہ وہ لاتناہی سے چلے آرہے ہیں اور انہوں نے نسبتاً چھوٹی رفتار سے حرکت کی ابتدا کی ہے۔ اِس صورت میں مدار تقریباً مکافی ہوتا ہے۔

کیپلر کے قوانین

۲۲۷ — سیاروں کے مداروں کے نظریہ کے انکشاف سے بہت پہلے جس کو نیوٹن نے باقاعدہ محسوب کیا تھا کیپلر نے وہ تین خاص قوانین تجربی طور پر معلوم کئے تھے جن کے تحت سیاروں کی حرکتیں جاری ہیں۔ کیپلر کے یہ تین قوانین حسب ذیل ہیں:

قانون (۱) — ہر سیارہ ایک قطع ناقص مرتسم کرتا ہے

جس کے ایک ماسکہ پر سورج ہوتا ہے۔

قانون (۲)۔ وہ رقبے جو سیارہ اور سورج کو ملانے والا نصف قطر سیارہ کے مدار میں مرتسم کرتا ہے اُن وقتوں کے متناسب ہوتے ہیں جن میں یہ رقبے مرتسم ہوتے ہیں۔ (۲۸۰)

قانون (۳)۔ اِن مختلف مداروں کے دَوری مدتوں کے مربع اِن کے محاورِ اعظم کے مکعبوں کے متناسب ہوتے ہیں۔

اِن میں سے پہلے قانون سے نیوٹن نے ثابت کیا کہ سیاروں اور سورج کے درمیان قوت کا قانون معکوس مُربع کا قانون ہونا چاہیئے۔ تیسرے قانون سے اُسی واقعہ کا اظہار ہوتا ہے جس کو مساوات (۱۱۴) بیان کرتی ہے۔

دو ذروں کی حرکت ایک دوسرے کے گرد

۲۲۸۔ اجرام کا وہ زوج جس کو دُوہرا تارہ کہتے ہیں آسمان میں عام طور پر دیکھا جا سکتا ہے۔ یہ تارہ دو ستاروں پر مشتمل ہوتا ہے جو ایک دوسرے کے گرد مدار مرتسم کرتے ہیں اور اِن میں سے کوئی ثابت نہیں ہوتا ہے۔

نویں باب میں ثابت شدہ مسئلوں سے اِن دو ستاروں کا مرکز ثقل یا تو ساکن رہنا چاہیئے یا یکساں رفتار سے ایک خط مستقیم میں حرکت کرنا چاہیئے اور اس صورت میں ہم دیکھ چکے ہیں کہ اِس کو ثابت سمجھا جا سکتا ہے اگر تمام حرکت کو ایک ایسے حوالے کے فریم کے لحاظ سے پیمائش کیا جائے جو اِس نقطہ کے ساتھ حرکت کرے۔

فرض کرو کہ کسی لمحہ پر اِن دو ستاروں کے محل ا، ب ہیں اور فرض کرو کہ اِن کا مرکز ثقل ث ہے۔ فرض کرو کہ ستاروں کی کمیتیں ک، کَ ہیں

اور فرض کرو کہ ث سے ان کے فاصلے ا، ب ہیں۔ اب

$$\frac{ک}{ب} = \frac{کَ}{ا} = \frac{ک + کَ}{ا + ب} \qquad (115)$$

تجاذب کا پورا قانون، قانون

$$ف = جہ \frac{ک کَ}{ر^2}$$

میں بیان ہو جاتا ہے جہاں ک، کَ کمیتیں ہیں اور ان کے درمیان فاصلہ ر ہے اور جہ ایک مستقل ہے جس کی قیمت تجربہ سے معلوم کی جا سکتی ہے اور ان دو کمیتوں کے درمیان تجاذبی قوت ف ہے۔ پس ستارہ ب پر عمل کرنے والی قوت

$$ف = جہ \frac{ک کَ}{(ا + ب)^2}$$

ہے اور اس کی سمت ب ا ہے۔ اس قوت کے متعلق ہمیشہ یہ فرض کیا جا سکتا ہے کہ وہ ثابت نقطہ ث سے عمل کر رہی ہے کیونکہ اس کا خطِ عمل ہمیشہ ب ث رہتا ہے۔ نیز اس قوت کی مقدار، ستارہ ب کی فی اکائی کمیت پر (281)

$$\frac{جہ ک}{(ا + ب)^2}$$

ہے یا رشتوں (115) کی مدد سے

$$\frac{جہ ک^3}{(ک + کَ)^2 ب^2}$$

ہے۔ یہ ایک قوت $\frac{مہ}{ر^2}$ ہے جو ث کی جانب عمل کرتی ہے اگر ہم رکھیں

$$مہ = \frac{جہ ک^3}{(ک + کَ)^2}$$

پس اِن دو ستاروں میں سے ہر ایک، مشترک مرکز ثقل دث کے گرد ایک مخروطی مرتسم کرتا ہے۔ اِن مخروطیوں کے مداروں کی مدت دوران ت اور محاور اعظم کی قیمتوں کا ہیئتی طور پر مشاہدہ کرنا ممکن ہے۔ اِن مقداروں سے ہم مہ کی قیمتیں معلوم کر سکتے ہیں اور اس لیے

$$\frac{ک^۳}{(ک + کَ)^۲} \quad ، \quad \frac{کَ^۳}{(ک + کَ)^۲}$$

کی قیمتیں معلوم ہو جاتی ہیں اور پھر اِن سے ک، کَ کی قیمتیں حاصل ہوتی ہیں۔ اِس طریقہ پر بعض ستاروں کی کمیتیں معلوم کرنا ممکن ہے۔

مثالیں

(تجاذبی مستقل جہ کو سنتی میتر گرام ثانیہ اکائیوں میں $۶٫۶۶ \times ۱۰^{-۸}$ کے مساوی لو)

۱۔ اگر زمین جذب کرے گویا کہ اِس کی کمیت اِس کے مرکز پر مرتکز ہے اور اگر خطِ اِستوا پر جس کا فاصلہ زمین کے مرکز سے $۶٫۳۷۸ \times ۱۰^{۸}$ سنتی میتر ہے ج کی قیمت ۹۷۸٫۱ سنتی میتر فی ثانیہ فی ثانیہ ہو تو زمین کی کمیت معلوم کرو۔

۲۔ زمین اور چاند کی کمیتوں کو علی الترتیب $۶٫۱۴ \times ۱۰^{۲۷}$ اور $۷٫۹۴ \times ۱۰^{۲۵}$ گرام لیکر اور اِن کے درمیان فاصلہ $۳٫۸۴ \times ۱۰^{۱۰}$ تسلیم کر کے چاند کی مدت دَوران معلوم کرو۔

۳۔ سورج کی کمیت کو ۲×۱۰^{۳۳} گرام اور سال کو ۳۶۵٫۲۴ یوم لیکر زمین کے مدار کا نیم محور اعظم معلوم کرو جبکہ سورج کو قوت کا ثابت مرکز سمجھا گیا ہو۔

۴۔ اگر سورج کی کمیت زمین کی کمیت کا ۳۲۴۰۰۰ گنا ہو تو معلوم کرو کہ سوال (۳) کے نتیجہ کو کس قدر تبدیل کرنا چاہئے جبکہ سورج کی حرکت کا بھی لحاظ رکھا جائے۔

۵۔ مشتری کی کمیت کو سورج کی کمیت کا $\frac{۱}{۱۰۸۰}$ اور سورج سے اِس کے بڑے سے بڑے فاصلہ کو ۴۹۸۵۰۰۰۰ میل لیکر ثابت کرو کہ مشتری کی کشش کی

(۲۸۲)

وجہ سے سورج ایک قطع ناقص مرتسم کرے گا جس کا نیم محور اعظم تقریباً ۴۶۱۰۰۰ میل کے مساوی ہوگا۔ نیز مشتری کے سال کا طول معلوم کرو۔

۶۔ وہ اعظم رفتار جو زمین اپنے مدار میں حاصل کرتی ہے ۳۰۰۰۰۰۰ سینٹی میٹر فی ثانیہ ہے اور اس کی اقل رفتار ۲۹۲۰۰۰۰ سینٹی میٹر فی ثانیہ ہے۔ زمین کے مدار کا خروج المرکز معلوم کرو۔

عام مثالیں

۱۔ ایک ذرہ جس کو ڈوری کے ذریعہ ایک نقطہ سے باندھا گیا ہے ایک انتصابی دائرے میں مکمل گردشیں کرنے کے لیے عین توانائی رکھتا ہے۔ ثابت کرو کہ ڈوری کا تناؤ صفر ہوگا جبکہ ذرہ اپنے راستے کے بلند ترین نقطہ پر ہوگا لیکن ذرہ کے وزن کا چھ گنا ہوگا جبکہ ذرہ اپنے راستے کے زیر ترین نقطہ پر ہوگا۔

۲۔ ایک ذرہ ایک چکنی دائری قوس کے محدب رُخ پر نیچے پھسلتے ہوئے جاذبہ کے تحت ایک انتصابی دائرہ میں حرکت کرتا ہے۔ اگر اس کی رفتار وہ ہو جو مرکز کے اوپر ارتفاع ف کی وجہ سے ہو سکتی ہے تو ثابت کرو کہ وہ دائرہ سے اُڑ کر نکل جائے گا جبکہ اُس کا ارتفاع مرکز کے اوپر $\frac{۲}{۳}$ ف ہو جائے۔

۳۔ اگر زاویہ عہ جس میں سے ایک سادہ رقاص انتصابی کی ہر ایک جانب جھولتا ہے چھوٹا ہو مگر صغیر نہ ہو تو ثابت کرو کہ پہلے تقرب تک اہتزاز کا وقت

$$\text{۲}\pi \sqrt{\frac{\text{ل}}{\text{ج}}} \left(\text{۱} + \frac{\text{۱}}{\text{۱۶}}\,\text{عہ}^{\text{۲}}\right)$$

ہے۔ اِس سے اخذ کرو کہ وہ رقاص جو ثانیوں کو صحیح طور پر ضربوں سے ظاہر کرتا ہے جبکہ وہ صغیر اہتزاز کر رہا ہو تقریباً ۴۰ ثانیہ فی یوم سُست ہو جائے گا اگر اِس کو ایک گھڑی میں لگا دیا جائے جو اِس کو انتصابی کی ہر ایک جانب °۵ اہتزاز کرنے پر مجبور کرے۔

۴۔ ایک ٹرین ایک منحنی کے گرد ۶۰ میل فی گھنٹہ کی ایکساں رفتار سے

حرکت کر رہی ہے، اور اس کے ایک ڈبے میں ثانیوں کا ایک رقاص دو دقیقوں میں ۱۲۱ دفعہ ضربوں کا اظہار کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ منحنی کا نصف قطر تقریباً ایک چوتھائی میل ہے۔

۵ — ایک لچکدار ڈوری کا طبعی طول ا اور لچک کا مقیاس لہ ہے۔ اِس کے ایک سرے کو چکنے اُفقی میز کے ایک ثابت نقطہ سے باندھا گیا ہے اور اِس کا دوسرا سرا کمیت ک کے ایک ذرہ سے بندھا ہے جو میز پر ساکن پڑا ہے۔ اگر ڈوری کے دوسرے سرے سے اِس کمیت کو فاصلہ ۲ ا تک کھینچکر چھوڑ دیا جائے تو ثابت کرو کہ ذرہ اپنے ابتدائی محل پر باقاعدہ وقفوں ۲ (π + ۲) $\sqrt{\frac{\text{ا ک}}{\text{لہ}}}$ کے بعد واپس ہوتا جائے گا۔

۶ — دو گولے جن کے وزن و$_۱$ اور و$_۲$ ہیں ایک تاگے سے جس کا طول ا ہے مربوط ہیں۔ و$_۱$ کو ہاتھ میں پکڑ کر و$_۲$ کو گول گھمایا گیا ہے۔ اگر و$_۱$ کو اس وقت چھوڑ دیا جائے جبکہ و$_۲$ ارتفاع عہ پر رفتار ط سے حرکت کر رہا ہو تو ظہور پذیر حرکت معلوم کرو اور ثابت کرو کہ ہوا میں تاگے کا تناؤ

$$\frac{\text{و}_۱\,\text{و}_۲}{\text{و}_۱ + \text{و}_۲}\;\frac{\text{ط}^۲}{\text{ج ا}}\ \text{پونڈ}$$

ہے۔ (۲۸۳)

۷ — دو کمیتیں ک$_۱$ اور ک$_۲$ ایک بے وزن کمانی سے مربوط ہیں جس کی طاقت ایسی ہے کہ جب ک$_۱$ کو مضبوط پکڑا جاتا ہے تو ک$_۲$، ن ارتعاش فی ثانیہ کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ اگر ک$_۲$ کو مضبوط پکڑ لیا جائے تو ک$_۱$، ن $\sqrt{\text{ک}_۲/\text{ک}_۱}$ ارتعاش فی ثانیہ کرے گا اور جب دونوں کمیتیں آزاد ہوں تو وہ ن $\sqrt{\frac{\text{ک}_۱ + \text{ک}_۲}{\text{ک}_۱}}$ ارتعاش فی ثانیہ کرینگی — ہر صورت میں ارتعاش کمانی کے خط میں واقع ہوتے ہیں۔

۸ — کمیت ک کا ایک ذرہ کسی شکل کی ایک چکنی منحنی نلی میں حرکت کرکے دو لچکدار ڈوریوں کے تناؤں کے تحت جو نلی میں ہیں توازن میں ہے۔ اِن ڈوریوں کے

طبعی طول ل، لَ اور لچک کے مقیاس لہ، لہَ ہیں، اور ان کے دوسرے سرے نلی کے ثابت نقطوں سے بندھے ہوئے ہیں۔ اگر ذرہ نلی میں اہتزاز کرے چھوٹے یا بڑے تو ثابت کرو کہ اہتزاز کی مدت

$$2\pi\sqrt{\frac{\text{ک}}{\frac{\text{لہ}}{\text{ل}}+\frac{\text{لہَ}}{\text{لَ}}}}$$

ہے۔

۹۔ ایک ڈوری ایک چکنے افقی میز کے ایک چھوٹے سوراخ میں سے گذرتی ہے اور اس کے سروں سے مساوی ذرے بندھے ہوئے ہیں جن میں سے ایک انتصاباً لٹک رہا ہے اور دوسرا میز پر سوراخ سے فاصلہ ا پر پڑا ہے۔ اس دوسرے ذرہ کو ڈوری کے عمود وار رفتار $\sqrt{\text{ج ا}}$ کے ساتھ اچھالا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ لٹکتا ہوا ذرہ ساکن رہے گا اور یہ کہ اگر اس حالت سکون میں خفیف طور پر خلل پڑے تو چھوٹے اہتزاز کی مدت $2\pi\sqrt{\frac{2\,\text{ا}}{3\,\text{ج}}}$ ہوگی۔

۱۰۔ ایک ذرہ نصف قطر ا کی ایک دائری نالی میں ایک کشش $\frac{\text{مہ}}{\text{ور}^2}$ کے تحت جو نقطہ ف کی جانب ہے حرکت کرتا ہے، نقطہ ف دائرہ کے مستوی میں ہے اور اس کے مرکز سے فاصلہ ب پر ہے۔ ذرہ کو رفتار و کے ساتھ دائرہ کے اس نقطہ سے پھینکا گیا ہے جو ف سے قریب ترین ہے۔ ثابت کرو کہ ذرہ مکمل گردشیں کرے گا اگر و^2، $\frac{4\,\text{مہ}\,\text{ب}}{\text{ا}^2-\text{ب}^2}$ سے کم نہ ہو۔

۱۱۔ ایک چکنے قطع ناقص کے نیم محور ا اور ب ہیں، اس کو اس طور پر رکھا گیا ہے کہ اس کا محور اعظم انتصابی ہے۔ ایک ذرہ کو ناقص کی قوس کے مقعر رُخ پر ایسی رفتار سے پھینکا گیا ہے جو مرکز کے اوپر ارتفاع ف کی باعث پیدا ہو سکتی ہے۔ وہ نقطہ معلوم کرو جس پر ذرہ قوس کو چھوڑ دے گا اور نیز ثابت کرو کہ وہ ناقص کے مرکز میں سے گذرے گا اگر

$$ف = \frac{۸ ا^۲ + ب^۲}{۶ ا \sqrt{۳}}$$

(۲۸۴)

۱۲ — ایک ذرہ نصف قطر ا کے ایک دائرہ میں کشش مہ ر فی اکائی کمیت کے تحت حرکت کرنے کے لیے مقید ہے، کشش دائرہ کے اندر ایک نقطہ کی جانب ہے جس کا فاصلہ مرکز سے ف ہے ۔ اگر ذرہ کو اِس نقطہ سے بڑے سے بڑے فاصلہ پر رکھکر صغیر رفتار سے متحرک کیا جائے تو ثابت کرو کہ وہ دائرہ کے دوسرے رُبع پر سے وقت

$$\sqrt{\frac{ا}{مہ ف}}\ لوک\ (\sqrt{۲} + ۱)$$

میں گذر جائے گا ۔

۱۳ — ایک ذرہ ایک ناقص کو قوت کے ایک مرکز کے گرد جو ماسکہ پر ہے مُرتسم کرتا ہے ۔ ثابت کرو کہ محور اصغر کے سرے پر کی رفتار کسی قطر کے سِروں پر کی رفتاروں کے درمیان وسط تناسب ہے ۔

۱۴ — ایک دُمدار تارہ ایک قطع مکافی کو مرتسم کرتا ہے ۔ ثابت کرو کہ اِسکی رفتار جو اِس کے مدار کے محور پر عمود ہے سورج سے سِمتی نیم قطر کے بالعکس متناسب ہے ۔

۱۵ — کمیت ک کا ایک دُمدار تارہ جو سورج کے گِرد ایک قطع مکافی مرتسم کررہا ہے مساوی کمیت ک کے ایک ساکن ذرہ سے ٹکراتا ہے اور یہ دونوں کمیتیں باہم حرکت کرتی ہیں ۔ ثابت کرو کہ اِن کا مرکز ثقل سورج کے گِرد ایک دائرہ مرتسم کرے گا جس کا مرکز سورج ہوگا ۔

۱۶ — یہ مان کر کہ ایک مرمی جاذبہ کے تغیرات کی رعایت رکھنے کے بعد زمین کے مرکز کے گِرد ایک قطع ناقص مرتسم کرتا ہے جس کا ایک ماسکہ زمین کے مرکز پر ہے ثابت کرو کہ نقطہ رمیدگی میں سے گذرنے والے ایک افقی مُستوی پر معلومہ رفتار و کے لیے بڑے سے بڑا ٹپہ

$$\frac{۴ ج و^۲ ر^۲}{۴ ج ر^۲ - و^۴}$$

ہے جہاں ر زمین کے مرکز سے نقطہ رسید گی کا فاصلہ ہے۔

۱۷ — جب زمین اپنے مدار کے محور اعظم کے سرے پر پہنچتی ہے تو ایک چھوٹا شہاب جس کی کمیت سورج کی کمیت کا م واں حصہ ہے اچانک سورج میں گرتا ہے۔ ثابت کرو کہ سال کا طول بقدر اپنے پہلے طول کے $\frac{۱}{۲م}$ ویں حصے کے گھٹ جائے گا۔

۱۸ — ایک سیارہ ث پر جو سورج س کے گرد حرکت کر رہا ہے ایک چھوٹا شہاب گرتا ہے جس کی وجہ سے اس کی رفتار بقدر اپنی پہلی رفتار کے $\frac{۱}{ن}$ ویں حصہ کے گھٹ جاتی ہے اگرچہ اس کی سمت نہیں بدلتی۔ ن کو چھوٹا سمجھ کر ثابت کرو کہ سیارہ کے مدار کا خروج المرکز بقدر ۲ ن (ز + جم ط) کے گھٹ جائے گا جہاں ط وہ زاویہ ہے جو س ث اور مدار کے محور اعظم کے درمیان ہے۔

نیز ثابت کرو کہ نیا محور اعظم پرانے محوروں کے ساتھ زاویہ $\frac{۲ن \text{ جب } ط}{ز}$ بنائیگا۔

۱۹ — ایک ذرہ ما سکے کے گرد ایک قطع ناقص کو مرتسم کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ بڑی سے بڑی اور کم سے کم زاوئی رفتاریں محور اعظم کے سروں پر واقع ہوتی ہیں اور نیز یہ کہ اگر یہ زاوئی رفتاریں عہ اور بہ ہوں تو اوسط زاوئی رفتار

$$\frac{۲ (عہ\, بہ)^{\frac{۳}{۴}}}{\left(\sqrt{عہ} + \sqrt{بہ}\right)}$$

ہے۔

۲۰ — ایک دمدار تارہ ایک قطع مکافی کو سورج کے گرد مرتسم کرتا ہے اور اس کا سورج سے قریب ترین فاصلہ زمین کے مدار کے نصف قطر کا ایک ثلث ہے جہاں زمین کے مدار کو دائری فرض کیا گیا ہے۔ زمین کے مدار کے اندر کتنے دنوں تک دمدار تارہ رہے گا؟ (۲۸۴)

۲۱ — اگر ایک ذرہ پر کشش ایسی بدلے جیسے قوت کے مرکز و سے فاصلے کے مربع کے بالعکس تو ثابت کرو کہ دو سمتیں ہیں جن میں کسی ذرہ کو ایک دئے ہوئے نقطہ ف سے اس طور پر پھینکا جا سکتا ہے کہ اس کے مدار کا محور اعظم معلوم

محور اعظم ہو۔ اگر و ف = ج اور اگر $ع_۱$، $ع_۲$ وہ زاوئے ہوں جو پھینکنے کی سمتیں و ف کے ساتھ بناتی ہیں تو ثابت کرو کہ

$$\text{مم}\ ع_۱\ \text{مم}\ ع_۲ = \frac{ج}{ا} - ۱$$

جہاں ا نیم محور اعظم ہے۔

۲۲۔ ایک ذرہ کو ایک نقطہ ف سے ایک قوت کے تحت جو ایک ثابت نقطہ س کی جانب ہے جس کا فاصلہ ف سے ر ہے اس طور پر پھینکا گیا ہے کہ ذرہ ایک دائرہ مرتسم کرتا ہے جو س میں سے گذرتا ہے۔ ابتدائی رفتار و ہے اور رفتار کا معیار س کے گرد ہ ہے۔ ثابت کرو کہ ذرہ وقت

$$\frac{ر^۲}{ہ^۲ ۴} \left(\pi\ و\ ر^۲ \pm ۲ ہ \sqrt{و^۲ ر^۲ - ہ^۲} \right)$$

میں ایک نیم دائرہ مرتسم کرے گا۔

۲۳۔ کمیت ک کا ایک کندہ جس کے بالائی اور زیریں رُخ چکنے افقی مستوی ہیں متوازی مستوی میں ایک نالی پر حرکت کرنے میں آزاد ہے اور کمیت ک کا ایک ذرہ اس کے بالائی رُخ میں ایک ثابت نقطہ پر ایک لچکدار ڈوری سے بندھا ہوا ہے جس کا طبعی طول ا اور مقیاس لہ ہے۔ اگر یہ نظام سکون سے حرکت میں آئے جبکہ ذرہ اس کے بالائی رُخ پر ہو اور ڈوری نالی کے متوازی اپنے طبعی طول کا ۱ + ن گنا تنی ہوئی ہو تو ثابت کرو کہ کندہ حیطہ

$$\frac{(ن + ۱)\ ا ک}{ک + ک}$$

اور دورِیہ

$$۲ \left(\pi + \frac{۲}{ن} \right) \sqrt{\frac{ا ک ک}{لہ (ک + ک)}}$$

کے اہتزاز کرے گا۔

(۲۸۶)

گیارھواں باب

اُستوار اجسام کی حرکت

۲۲۹ — اس باب میں اُستوار اجسام کی حرکت سے بحث کی جائے گی جبکہ حرکت ایسی ہو کہ اجسام ذرے متصور نہ ہو سکیں۔

دفعہ ۶۶ میں ثابت کیا جا چکا ہے کہ اُستوار اجسام کی عام سے عام ممکن حرکت حرکت انتقال اور گردشی حرکت سے مرکب ہوتی ہے۔ کسی قسم کی قوتوں کے زیر عمل کسی اُستوار جسم کی عام حرکت پر بحث کرنے سے پیشتر گردشی حرکت کے خواص کا پہلے سے زیادہ تفصیل کے ساتھ امتحان کرنا مناسب ہوگا۔

زاویئی رفتار

۲۳۰ — ہم دیکھ چکے ہیں (دفعہ ۶۷) کہ کسی اُستوار جسم کی ہر حرکت کے لئے جس میں ایک نقطہ ف ثابت رہے گردش کا ایک محور ہوتا ہے جو ف میں سے گذرنے والا ایک خط ہے جس کا ہر نقطہ ثابت رہتا ہے۔ اگر اُستوار جسم مسلسل حرکت کر رہا ہو تو ہم اس کی حرکت کی تحلیل حسب ذیل طریقہ پر کر سکتے ہیں۔ ہم اُستوار جسم کا ایک معیّن نقطہ ف منتخب کرتے ہیں اور حرکت کا حوالہ ایک ایسے حوالے کے فریم سے دیتے ہیں جس میں

نقطہ ف مبدا ہوتا ہے اور جو (فریم) اس طرح حرکت کرتا ہے کہ ہمیشہ اپنے ابتدائی محل کے متوازی رہتا ہے۔ اس فریم کے لحاظ سے کسی دو لمحات کے درمیان جسم کی حرکت، ف کے گرد گردشی حرکت ہوتی ہے۔

فرض کرو کہ وقفہ فرت کی اثناء میں جسم کی گردش، گردش کے محور ف ق کے گرد زاویہ فرطہ ہے۔ تب شرح $\frac{\text{فرطہ}}{\text{فرت}}$ کی انتہا کو جبکہ فرت لا انتہا چھوٹا بنا دیا گیا ہو جسم کی زاوئی رفتار کہتے ہیں۔ اس زاوئی رفتار سے اُس زاویہ کی پیمائش ہوتی ہے جس میں سے جسم فی اکائی وقت گھومتا ہے۔ (۲۸۷)

اِس لیے کسی لمحہ پر ایک اُستوار جسم کی حرکت کا پورا علم حاصل کرنے کے لیے حسب ذیل اُمور معلوم ہونے چاہئیں:

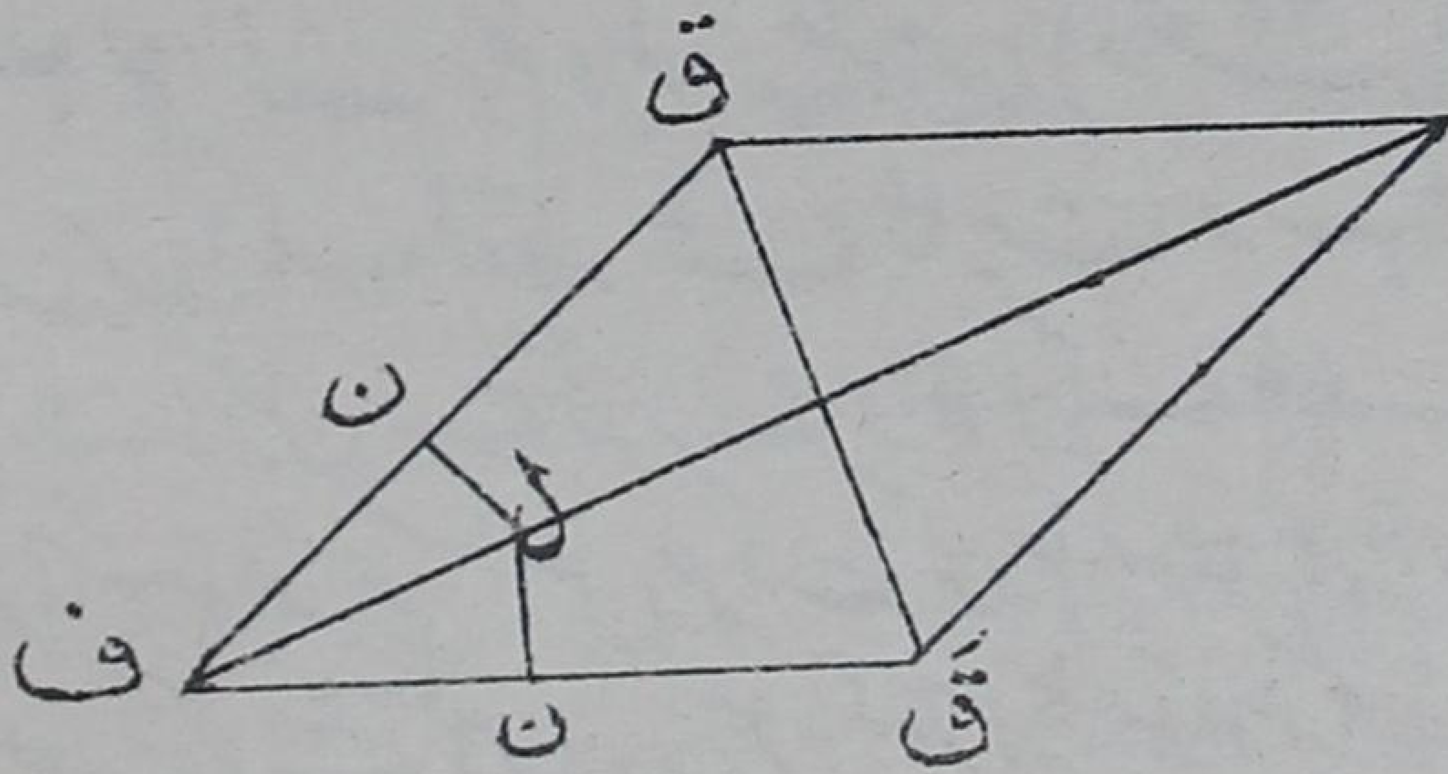
(ا) حوالے کے فریم کے لیے منتخب شدہ نقطہ ف کی رفتار کی سمت اور مقدار،

(ب) ف میں سے گذرنے والے گردش کے محور کی سمت،

(ج) گردش کے محور کے گرد زاوئی رفتار کی مقدار۔

۲۳۱ — زاوئی رفتار کے ساتھ دو چیزیں وابستہ ہوتی ہیں: سمت — گردش کا محور — اور مقدار۔ اس لیے اِس کو ایک خط سے تعبیر کیا جا سکتا ہے۔ اب ہم ثابت کریں گے کہ وہ ایک سمتی ہے یعنے یہ کہ زاوئی رفتاروں کو قانون متوازی الاضلاع کی بموجب مرکب کیا جا سکتا ہے۔

فرض کرو کہ ایک اُستوار جسم، ف کے گرد گردش کرتا ہے جو (ا) ایک محور ف ق کے گرد زاوئی رفتار سہ کی



شکل (۱۳۸)

ایک گردش اور (ب) ایک دوسرے محور ف قَ کے گرد زاوئی رفتار سہَ کی ایک گردش سے مرکب ہے۔ فرض کرو کہ طول ف ق اور ف قَ، سہ اور سہَ کے متناسب لیے گئے ہیں اور اس لیے خطوط ف ق اور ف قَ، اُسی پیمانہ پر زاوئی رفتاروں کی سمتوں اور مقداروں کو تعبیر کریں گے۔

فرض کرو کہ متوازی الاضلاع ف ق ر قَ کی تکمیل کیگئی ہے اور فرض کرو کہ اِس کے وتر ف ر پر کوئی نقطہ ل ہے۔ فرض کرو کہ ف ق اور ف قَ پر ل سے عمود ل ن اور ل نَ کھنچے گئے ہیں پہلی زاوئی رفتار کی وجہ سے اُستوار جسم وقت فرت میں ف ق کے گرد زاویہ سہ فرت میں سے گھومتا ہے۔ اِس گردش کا اثر یہ ہوگا کہ جسم کا وہ ذرہ جو ابتداءً ل پر منطبق تھا مُستوی ف ل ن کے علی القوائم فاصلہ ل ن × سہ فرت میں سے حرکت کرے گا۔ اِسی طرح ف قَ کے گرد گردش کا یہ اثر ہوگا کہ وہی ذرہ مُستوی کے علی القوائم فاصلہ ل نَ × سہَ فرت میں سے حرکت کرے گا لیکن اُس سمت میں جو پہلی حرکت کی سمت کے مخالف ہے۔ اِس لیے ذرہ کا کل ہٹاؤ

ل ن سہ فرت - ل نَ سہَ فرت (۱۱۶)

ہے۔

(۲۸۸)

اب چونکہ ل، متوازی الاضلاع کے وتر پر ہے اِس لیے ہم دیکھتے ہیں کہ مثلث ف ل ق کا رقبہ، مثلث ف ل قَ کے رقبہ کے مساوی ہے اور اِس لیے

ل ن × ف ق = ل نَ × ف قَ

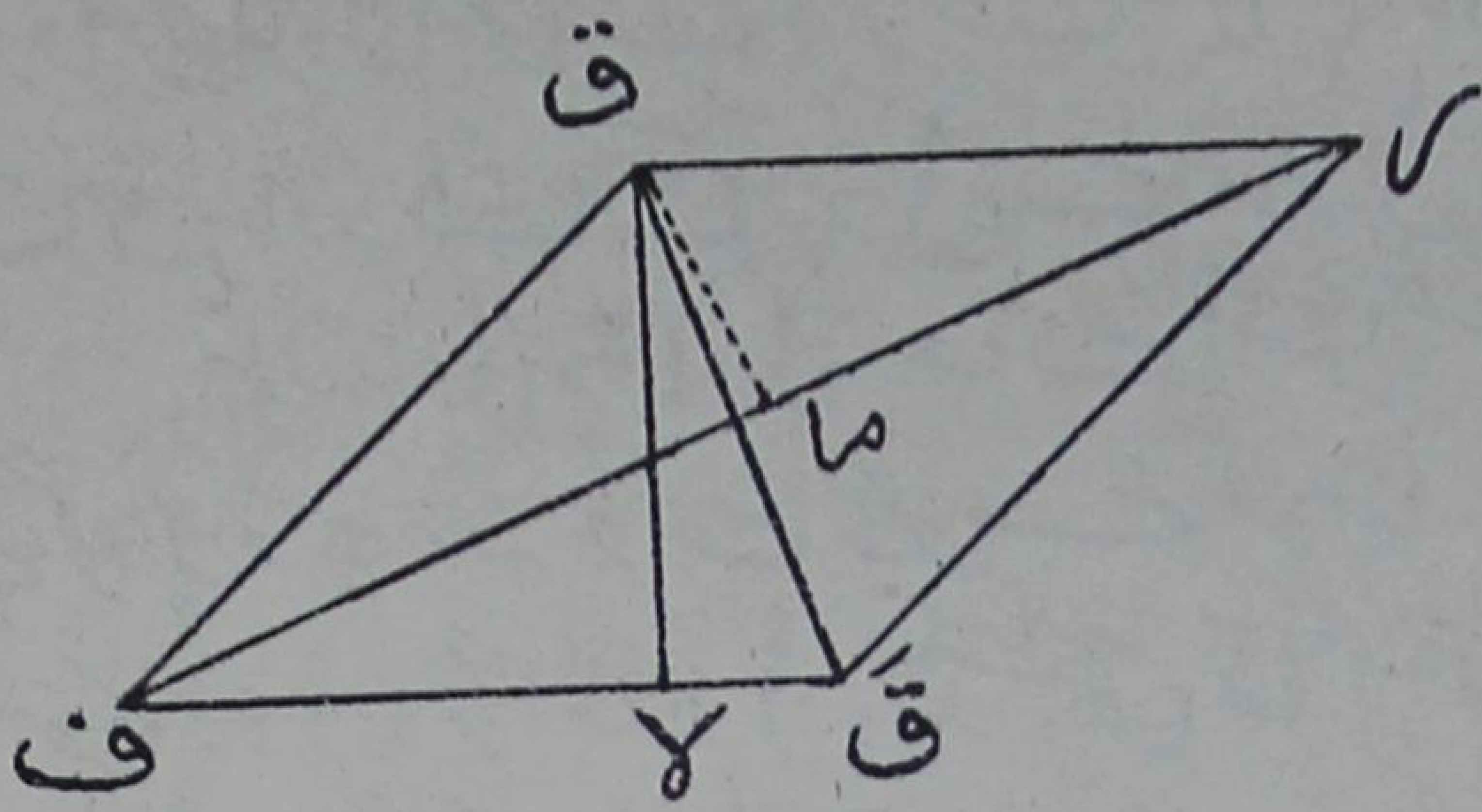
نیز چونکہ ف ق : ف قَ = سہ : سہَ اِس لیے یہ مساوات شکل

ل ن × سہ = ل نَ × سہَ

میں لکھی جا سکتی ہے اور اِس کا مقابلہ مساوات (۱۱۶) کے ساتھ کرنے پر ہم دیکھتے ہیں کہ ذرہ ل کا ہٹاؤ معدوم ہوتا ہے۔

اِس لیے مفروضہ دو زاوئی رفتاروں کا حاصل ایک ایسی حرکت ہے کہ نقطے ف اور ر دونوں ساکن رہتے ہیں۔ اِس لیے یہ حرکت وہ زاوئی رفتار ہے جس کی گردش کا محور متوازی الاضلاع کا وتر ف ر ہے۔

اِس کے بعد زاوئی رفتار کی مقدار معلوم کرنی چاہیئے۔ فرض کرو کہ یہ مقدار طا سے تعبیر ہوتی ہے۔ ق سے ف قَ اور ف ر پر عمود ق لا، ق ما کھینچو۔ ذرہ ق کا ہٹاؤ وقت فرت میں ق ما × طا × فرت ہوگا اور یہ ہٹاؤ مستوی کے علی القوایم ہوگا۔ لیکن اِس ہٹاؤ کو اُن ہٹاؤں کے مرکب کرنے سے بھی حاصل کیا جا سکتا ہے جو



شکل (۱۳۹)

زاوئی رفتاروں سہ، سَہ سے پیدا ہوتے ہیں۔ اول الذکر رفتار سے پیدا شدہ ہٹاؤ صفر ہے کیونکہ ق گردش کے محور پر ہے، اور ثانی الذکر سے پیدا شدہ ہٹاؤ ق لا سَہ فرت ہے۔ اِس لیے

ق ما × طا فرت = ق لا × سَہ فرت (۱۱۷)

لیکن ق ما × ف ر = ق لا × ف قَ

کیونکہ ہر ایک متوازی الاضلاع کے رقبہ کے مساوی ہے، اِس لیے اِس کو ربط (۱۱۷) کے ساتھ لینے سے

$$\frac{\text{طا}}{\text{ف ر}} = \frac{\text{سَہ}}{\text{ف قَ}}$$

اِس طرح اگر سَہ کو ف قَ سے تعبیر کیا گیا ہے تو طا اُسی پیمانہ پر ف ر سے تعبیر ہوگا۔ پس ہم نے ثابت کر دیا کہ ایک متوازی الاضلاع ف ق ر قَ کے اضلاع (۲۸۹)

ف ق، ف قَ سے تعبیر شدہ دو زاویائی رفتاروں کا حاصل ایک زاویائی رفتار ہے جو متوازی الاضلاع کے وتر ف ر سے تعبیر ہوتی ہے۔

پس زاویائی رفتار ایک سمتی ہے اور اس کے وہی خواص ہیں جو تمام سمتیوں کے لیے ثابت کئے جا چکے ہیں۔

۲۳۲ — پس یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ گردش کے ایک محور کے گرد جس کی سمتی جیوب التمام ل، م، ن ہیں زاویائی رفتار طا ہو تو طا کی بجائے تین زاویائی رفتاریں سہ۱، سہ۲، سہ۳ محددوں کے محوروں کے گرد لی جا سکتی ہیں ایسی کہ

$$\text{سہ}_1 = \text{ل طا}،\quad \text{سہ}_2 = \text{م طا}،\quad \text{سہ}_3 = \text{ن طا} \qquad (118)$$

مربع لیکر جمع کرنے سے

$$\text{طا}^2 = \text{سہ}_1^2 + \text{سہ}_2^2 + \text{سہ}_3^2 \qquad (119)$$

اب ہم دیکھتے ہیں کہ کسی اُستوار جسم کی حرکت معلوم ہو جاتی ہے اگر

(ا) نقطہ ف کی رفتار کے اجزائے ترکیبی ع، و، ط

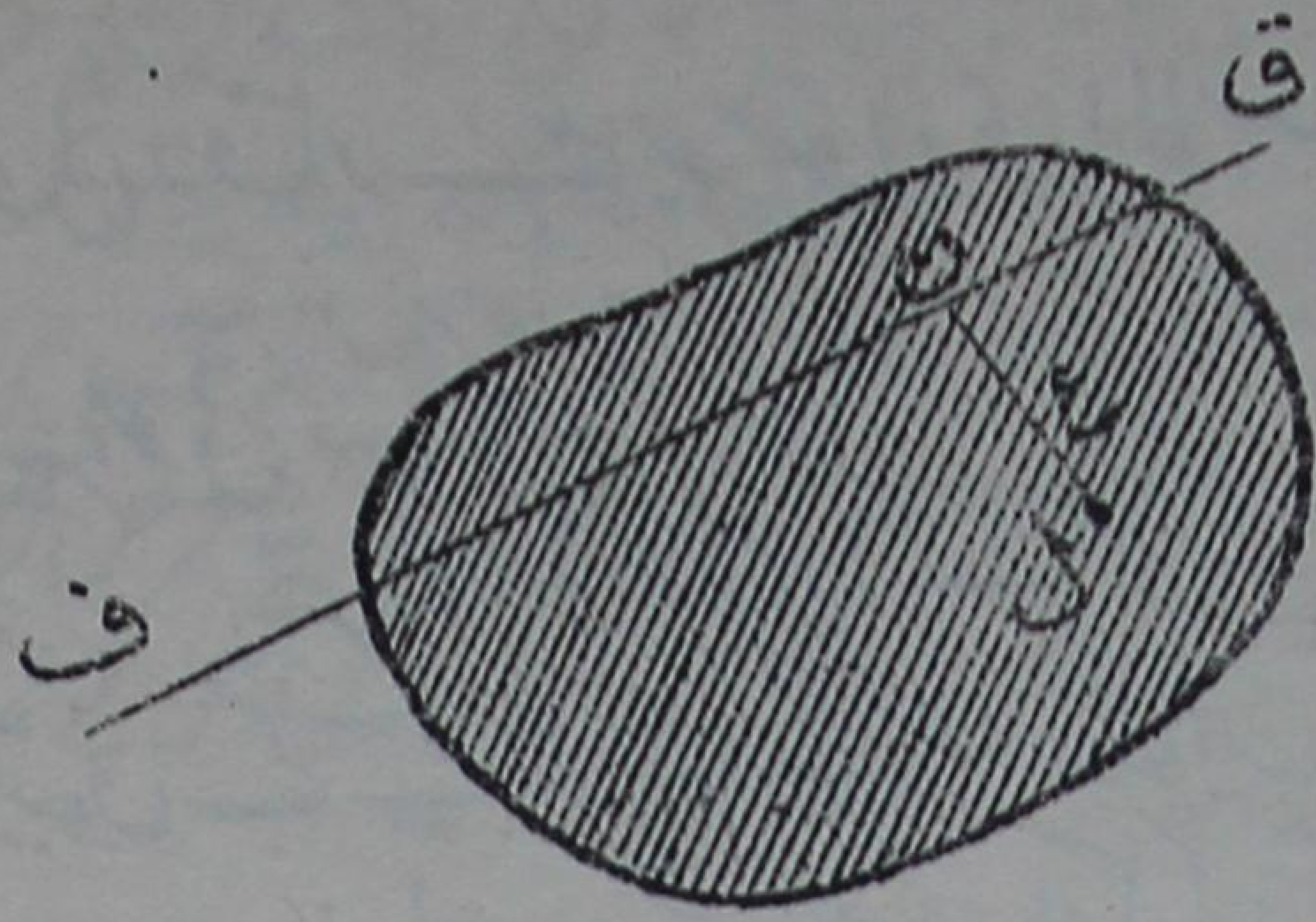
اور (ب) زاویائی رفتار کے اجزائے ترکیبی سہ۱، سہ۲، سہ۳

معلوم ہوں۔

گردش کی توانائی بالحرکت

۲۳۳ — فرض کرو کہ کسی لمحہ پر ایک اُستوار جسم گردش کے ایک محور ف ق کے گرد زاویائی رفتار طا کے ساتھ گردش کر رہا ہے۔

فرض کرو کہ جسم کا کوئی ذرہ ل ہے اور اس کی کمیت ک ہے۔ فرض کرو کہ ف ق پر عمود ل ن کھینچا گیا ہے اور اس کا طول ع ہے۔



اب ذرہ ل کی رفتار ع طا ہے اور اس کی توانائی بالحرکت $\frac{1}{2}$ ک ع^{2} طا^{2} ہے۔ جمع کرنے پر پورے جسم کی توانائی بالحرکت

$$\frac{1}{2}(\sum \text{ک ع}^{2})\,\text{طا}^{2}$$

حاصل ہوتی ہے۔

شکل (۱۴۰)

(۲۹۰) مقدار $\sum$ ک ع^{2} کو محور ف ق کے گرد جمود کا معیار کہتے ہیں۔ اگر ہم مقدار گ داخل کریں ایسی کہ

$$\text{گ}^{2} = \frac{\sum \text{ک ع}^{2}}{\sum \text{ک}}$$

یعنے گ^{2}، ع^{2} کی وہ اوسط قیمت ہے جو جسم کے تمام ذروں پر اوسطاً لی گئی ہے تو گ کو محور ف ق کے گرد گھماو کا نصف قطر کہتے ہیں۔ اب توانائی بالحرکت کو شکل

$$\frac{1}{2}(\sum \text{ک ع}^{2})\,\text{طا}^{2} = \frac{1}{2}\sum(\text{ک})\,\text{گ}^{2}\,\text{طا}^{2}$$

یوں لکھا جا سکتا ہے اور اس لیے توانائی بالحرکت وہی ہے گویا کہ جسم کی کُل کمیت ایک نقطہ پر جس کا فاصلہ گردش کے محور سے گ ہے مرتکز ہے۔

اُستوار جسم کی توانائی بالحرکت

۲۳۴ —— نقطہ ف اختیاری ہے اور اس لیے فرض کرو کہ یہ وہ نقطہ ہے جو جسم کا مرکز ثقل ہے۔ اب جسم کی عام سے عام حرکت (۱) ایک حرکت انتقال اور (۲) گردش کی ایک حرکت سے مرکب ہو سکتی ہے۔

حرکت (۱) مرکزِ ثقل کی حرکت انتقال کے مماثل ہے اور حرکت (۲) مرکزِ ثقل میں سے گذرنے والے ایک محور گرد گردشی حرکت ہے۔

فرض کرو کہ مرکزِ ثقل کی رفتار و ہے، مرکزِ ثقل میں سے گذرنیوالے گردش کے محور کے گرد زاوئی رفتار طا اور گھماؤ کا نصف قطر گ ہے۔

فرض کرو کہ جسم کی کُل کمیت $\sum$ ک = ک۔

دفعہ ۱۸۶ کے مسئلہ کی رو سے جسم کی کُل توانائی بالحرکت دو اجزا کا مجموعہ ہے:

(ا) کمیت ک کے ایک واحد ذرہ کی توانائی بالحرکت جو جسم کے مرکزِ ثقل کے ساتھ حرکت کر رہا ہو،

(ب) مرکزِ ثقل کے لحاظ سے حرکت کی توانائی بالحرکت۔

جزو (ا) کی قیمت $\frac{1}{2}$ ک $و^2$ ہے اور جزو (ب) کی $\frac{1}{2}$ ک $گ^2$ $طا^2$۔

پس مجموعی توانائی بالحرکت

$$\frac{1}{2} ک \left(و^2 + گ^2 طا^2\right) \qquad (۱۲۰)$$

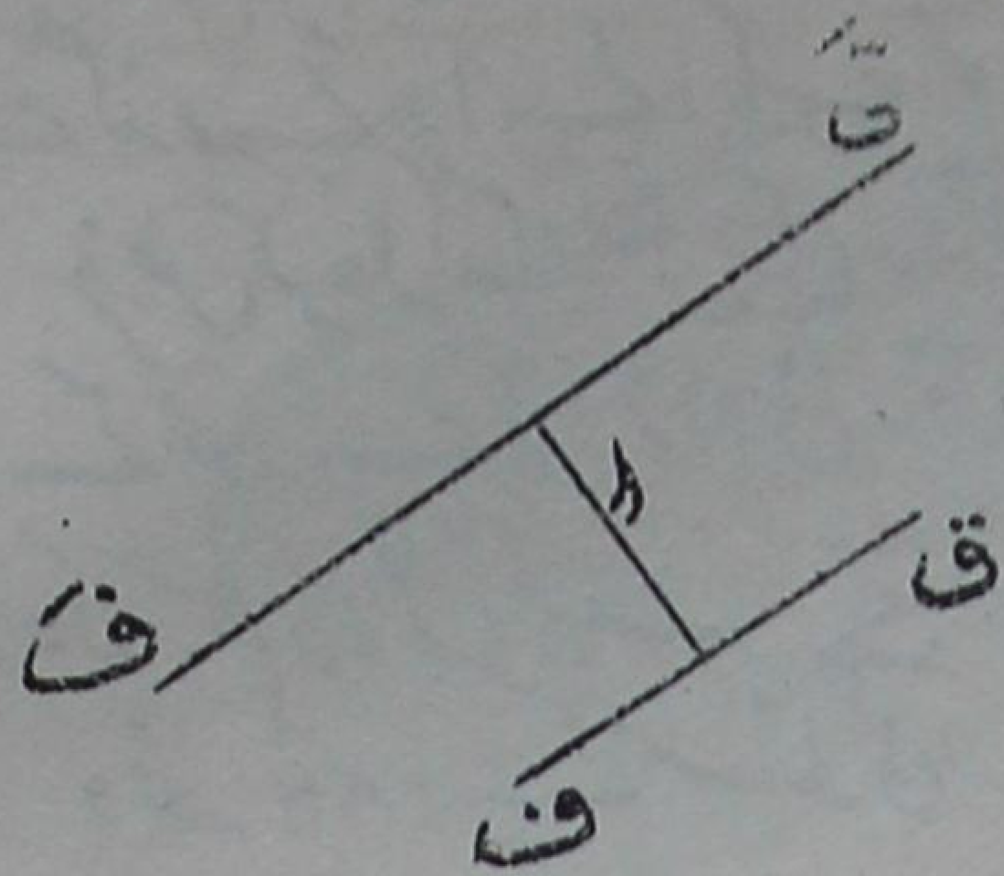
ہے۔ یہ جملہ خود بڑی اہمیت رکھتا ہے لیکن یہ اِس وجہ سے بھی دلچسپ ہے کہ اِس کی مدد سے حسب ذیل مسئلہ ثابت کیا جا سکتا ہے۔

۲۳۵ ـــ مسئلہ ـ فرض کرو کہ مرکزِ ثقل میں سے گذرنیوالے کسی محور کے گرد گھماؤ کا نصف قطر گ ہے اور فرض کرو کہ اِس گھماؤ کے محور سے فاصلہ ا پر کے ایک متوازی محور کے گرد گھماؤ کا محور گَ ہے تو (۲۹۱)

$$گَ^2 = گ^2 + ا^2$$

فرض کرو کہ مرکزِ ثقل ث میں سے گذرنے والا کوئی محور ف ق ہے اور فرض کرو کہ اِس محور سے فاصلہ ا پر کوئی متوازی محور فَ قَ ہے۔

فرض کرو کہ فَ قَ کے گرد اُستوار جسم گردش کی حرکت رکھتا ہے اور اسکی زاوی رفتار طا ہے۔



شکل (۱۴۱)

اب ث کی رفتار ا طا ہے اور حرکت کو دو حرکتوں سے مرکب خیال کیا جا سکتا ہے (۱) رفتار ا طا کی حرکت انتقال اور (۲) محور ف ق کے گرد گردش طا کی حرکت۔ ضابطہ (۱۲۰) کی رو سے توانائی بالحرکت ہے

$\frac{1}{2}$ ک (اٗ طا٢ + گ٢ طا٢)

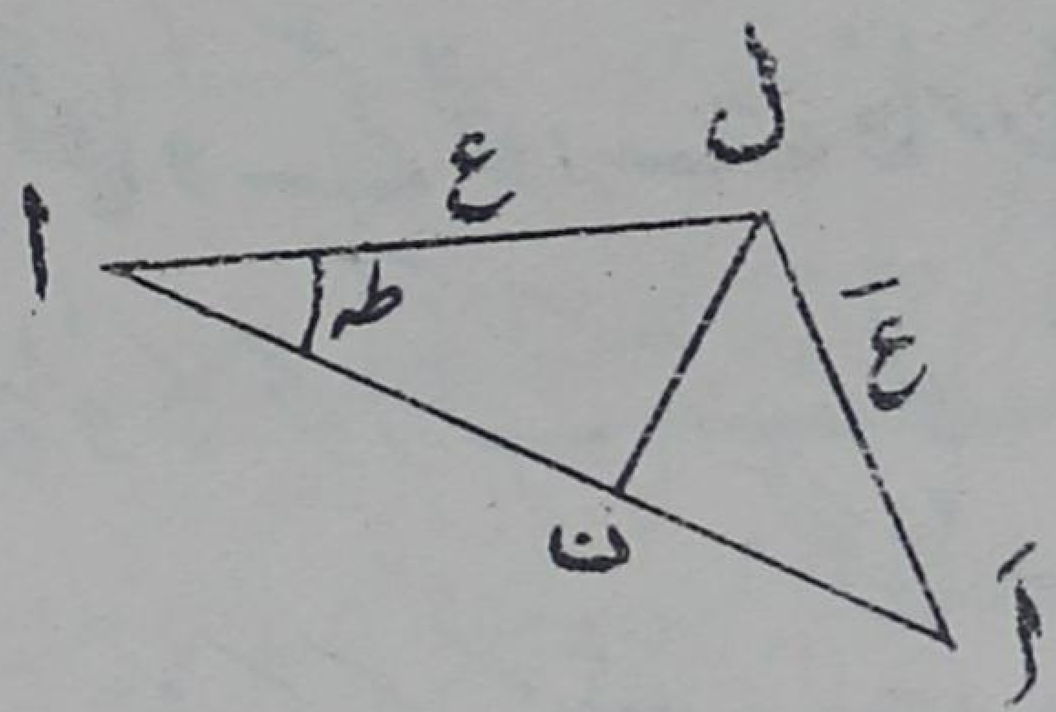
نیز وہ $\frac{1}{2}$ ک گَ٢ طا٢ کے مساوی بھی ہے، جہاں گَ، فَ قَ کے گرد گھماؤ کا نصف قطر ہے۔ اس لیے

$\frac{1}{2}$ ک گَ٢ طا٢ = $\frac{1}{2}$ ک (اٗ طا٢ + گ٢ طا٢)

اور $\frac{1}{2}$ ک طا٢ سے تقسیم کرنے پر مطلوبہ نتیجہ حاصل ہو جاتا ہے۔

۲۳۶ — متبادل ثبوت — اِس مسئلہ کو ہندسی طور پر بھی ثابت کیا جا سکتا ہے:

فرض کرو کہ جسم کا کوئی ذرہ ل ہے اور فرض کرو کہ شکل (۱۴۲) کا مستوی وہ مستوی ہے جو ل میں سے گذرتا ہے اور گردش کے دو محوروں کے علی القوائم ہے اور یہ محور مستوی کو علی الترتیب نقطوں ا، اَ پر قطع کرتے ہیں۔ فرض کرو کہ ل ا = ع، ل اَ = عَ اور فرض کرو کہ ل ن،



شکل (۱۴۲)

اا' پر عمود کھینچا گیا ہے۔ تب ک گ'^{2} = ∑ ک ع^{2} اور نیز

ک گ'^{2} = ∑ ک عَ^{2}

= ∑ ک (عَ^{2} + اا'^{2} − ۲ عَ × اا' جم طہ)

= ک گ'^{2} + ک × اا'^{2} − ۲ اا' (∑ ک × ان)

اب ان، خط اا' پر اُس خط کا ظِل ہے جو ل سے مرکز ثقل تک کھینچا گیا ہے۔ اِس لیے ∑ ک × ان = ۰ اور اِس لیے

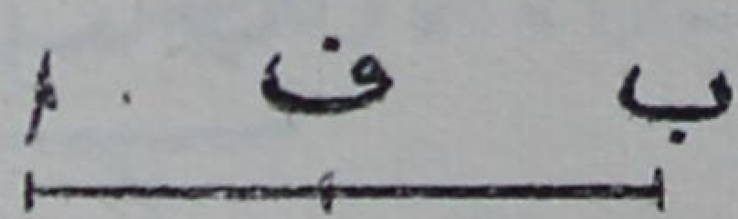
ک گ'^{2} = ک گ'^{2} + ک × اا'^{2}

اِس کو ک سے تقسیم کرنے پر مطلوبہ نتیجہ حاصل ہوتا ہے۔

(۲۹۲) **۲۳۷** — اوپر کے ثابت شدہ مسئلے سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ کسی محور کے گِرد گھماؤ کا نصف قطر فوراً معلوم ہو سکتا ہے اگر ہمیں مرکز ثقل میں سے گذرنے والے متوازی محور کے گِرد گھماؤ کا نصف قطر معلوم ہو اور اس کے بالعکس۔ اب ہم گھماؤ کے نصف قطروں کو محسوب کرنے کی چند مثالیں دیں گے۔

گھماؤ کے نصف قطروں کو محسوب کرنا

۲۳۸ — **یکساں پتلا ڈنڈا**۔ فرض کرو کہ ڈنڈے اب کا طول ۲ ا ہے اور فرض کرو کہ اِس کے عمود وار ا میں سے گذرنے والے محور کے گِرد گھماؤ کا نصف قطر گ ہے۔ فرض کرو کہ ڈنڈے کی کمیت فی اکائی طول تہ ہے اور فرض کرو کہ لا وہ محدد ہے جو ا سے فاصلوں کو پیمائش کرتا ہے۔ اُس عنصر کی کمیت جو لا سے لا + فرلا تک ہے تہ فرلا ہے اور گردش کے محور سے اِس کا عمودی فاصلہ لا ہے۔ اِس لیے



شکل (۱۴۳)

$$گ^۲ = \frac{\Sigma ک ع^۲}{\Sigma ک} = \frac{\int گ^۲ (ثہ فرلا) لا^۲}{\int گ (ثہ فرلا)} = \frac{\frac{۸}{۳} ثہ ا^۳}{۲ ثہ ا} = \frac{۴}{۳} ا^۲$$

اِس لیے گھماؤ کا نصف قطر $\frac{۲ ا}{\sqrt{۳}}$ ہے۔

مرکزِ ثقل کے گرد جس کا فاصلہ ا سے ا ہے گھماؤ کا نصف قطر

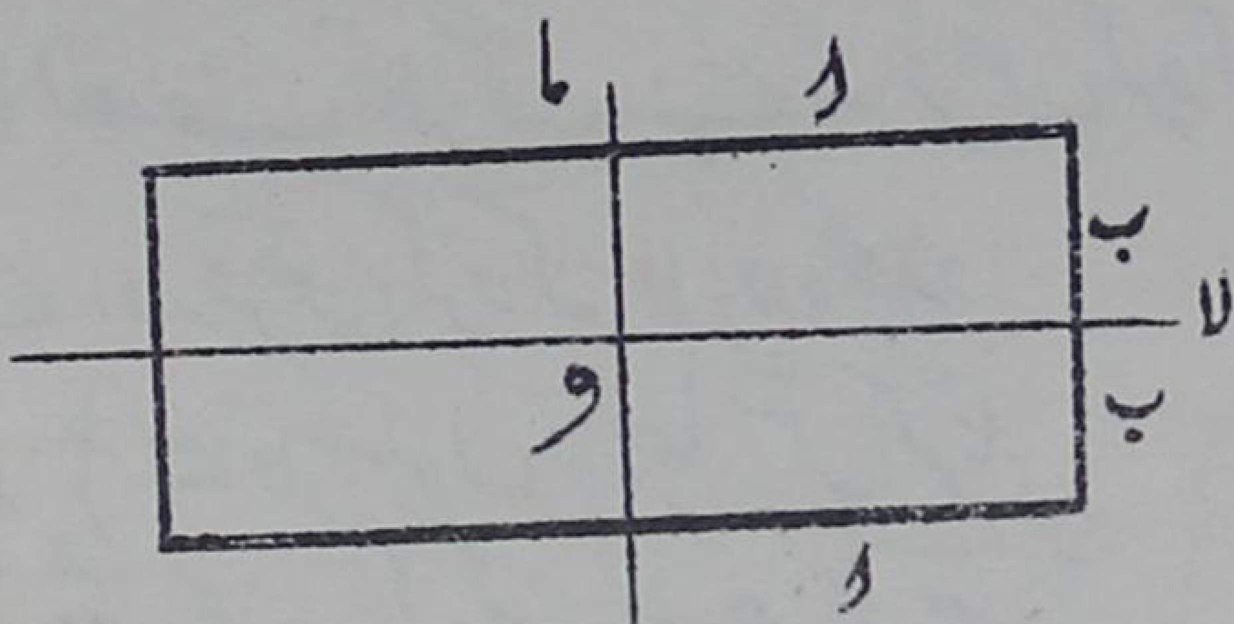
$$گ^۲ = \frac{۴}{۳} ا^۲ - ا^۲ = \frac{ا^۲}{۳}$$

سے حاصل ہوگا اور اِس لیے مرکزِ ثقل کے گرد گھماؤ کا نصف قطر $\frac{ا}{\sqrt{۳}}$ ہے۔

۲۳۹ — مستطیلی پترا۔ فرض کرو کہ پترے کے کنارے ۲ا، ۲ ب ہیں اور ہم اُس محور کے گرد گھماؤ کا نصف قطر معلوم کرنا چاہتے ہیں جو اِس کے مرکز میں سے گذرتا ہے اور اِس کے مستوی پر عمود ہے۔ شکل (۱۴۴) کے مطابق محور لو اور فرض کرو کہ فی اکائی رقبہ کمیت ثہ ہے۔ تب

$$گ^۲ = \frac{\Sigma ک ع^۲}{\Sigma ک} = \frac{\int\int (ثہ فرلا فرما)(لا^۲ + ما^۲)}{۴ ا ب ثہ} \qquad (۲۹۳)$$

تکمل پورے پترے پر لینا چاہئے اور اِس لیے حدود لا = ا سے لا = -ا، ما = ب سے ما = -ب تک ہیں۔



شکل (۱۴۴)

تکمل کرنے پر

$$گ^۲ = \frac{ا^۲ + ب^۲}{۳}$$

ب = ۰ لینے پر پترا ایک پتلا ڈنڈا ہو جاتا ہے اور نتیجہ وہی حاصل ہوتا ہے جو پچھلے دفعہ میں حاصل ہوا تھا۔

۲۴۰ - **متجانس ٹھوس ناقص نما** - فرض کرو کہ ناقص نما کے نیم محور ا، ب، ج ہیں اور فرض کرو کہ ہم محور اعظم کے گرد گھماؤ کا نصف قطر معلوم کرتے ہیں ۔ ناقص نما کے صدر محوروں کو محددوں کے محور لینے سے اور ناقص نما کی کثافت کو غ سے تعبیر کرنے پر حاصل ہوتا ہے

$$گ^2 = \frac{\Sigma ک ع^2}{\Sigma ک} = \frac{\iiint (غ فرلا فرما فری)(ما^2 + ی^2)}{\iiint غ فرلا فرما فری}$$

جہاں تکمل ناقص نما کے پورے حجم پر لیا گیا ہے ۔ تکملات کی تکمیل کرنے سے حاصل ہوتا ہے :-

$$گ^2 = \frac{ب^2 + ج^2}{5}$$

مثالیں

۱ - ایک ڈنڈا ۱۲ انچ لمبا ہے ۔ اُس نقطہ کے گرد گھماؤ کا نصف قطر معلوم کرو جس کا فاصلہ ایک سرے سے ۴ انچ ہے ۔

۲ - ایک دائری قرص کا گھماؤ کا نصف قطر معلوم کرو :

(ا) اُس محور کے گرد جو قرص کے مرکز میں سے گذرے اور اس کے مُستوی پر عمود ہو،

(ب) ایک قطر کے گرد ۔

۳ - ثابت کرو کہ نصف قطر ا کے ایک کرہ کا گھماؤ کا نصف قطر کسی قطر کے گرد $\sqrt{\frac{2}{5}}$ ا ہے اور کسی مماس کے گرد $\sqrt{\frac{7}{5}}$ ا ہے ۔

۴ - ایک مکعب کا گھماؤ کا نصف قطر ایک کنارے کے گرد معلوم کرو ۔

۵ - ایک مربع پترے کا گھماؤ کا نصف قطر ایک وتر کے گرد معلوم کرو ۔

۶۔ ایک ٹھوس دائری اسطوانے کا گھماؤ کا نصف قطر معلوم کرو:

(ا) ایک محور کے گرد،

(ب) ایک مکون کے گرد،

(ج) ایک سرے کے ایک قطر کے گرد۔

۷۔ ثابت کرو کہ ایک ٹھوس مخروطی نکلے کا گھماؤ کا نصف قطر اس کے محور کے گرد $\sqrt{\frac{3}{10}}$ ا ہے جہاں ا قاعدے کا نصف قطر ہے۔

راوتھ کا قاعدہ

(۲۹۴)

۱۴۲۔ حسب ذیل سہولت بخش قاعدہ سے جس کو ڈاکٹر راوتھ نے (Rigid Dynamics, 8) بیان کیا ہے گھماؤ کے مختلف نصف قطروں کو یاد رکھنے کا آسان طریقہ حاصل ہوتا ہے۔ اس قاعدہ کا اطلاق خطی، مستوی اور ٹھوس اجسام پر جو

(ا) قائم الزاویہ (ڈنڈا، پترا، یا متوازی السطوح)

(ب) ناقصی یا دائری (قرص یا پترا)

(ج) ناقص نما، کرہ نما، یا کروی (مجسم، ٹھوس)

ہوں ہوتا ہے۔ یہ قاعدہ حسب ذیل ہے:

مرکز ثقل میں سے گذرنے والے تشاکل کے کسی محور کے گرد گھماؤ کا نصف قطر گ، مساوات

$$\text{گ}^2 = \frac{\text{عمودی نیم محوروں کے مربعوں کا مجموعہ}}{\text{۳، ۴، یا ۵}}$$

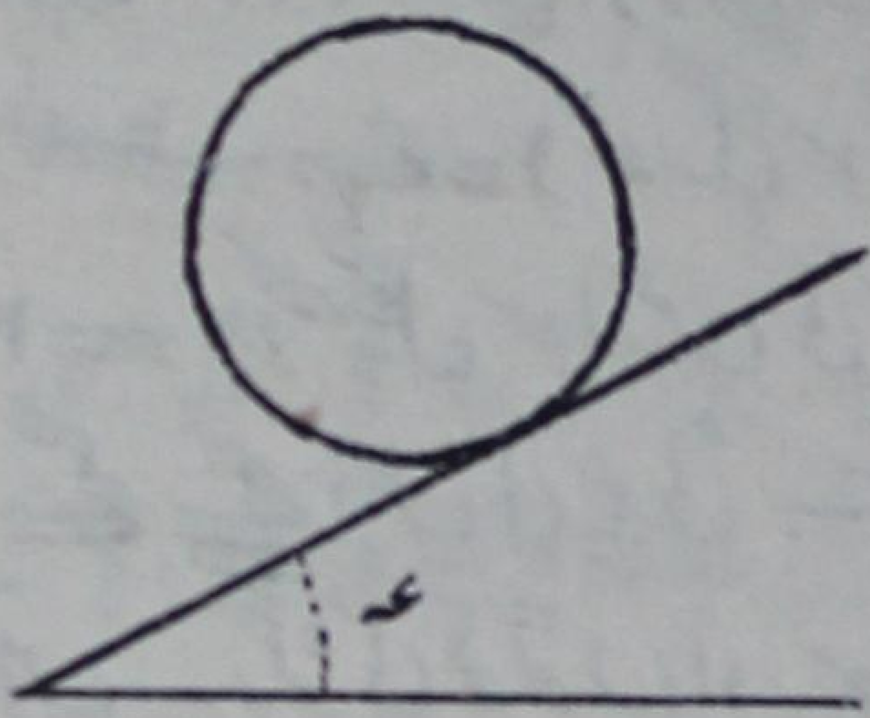
سے حاصل ہوگا جہاں نسب نما ۳، ۴، یا ۵ ہے بموجب اس کے کہ جسم تقسیم (ا)، (ب)، یا (ج) کے تحت ہو۔

توضیحی مثال

ایک سکہ ایک مائل مُستوی پر لڑھکتا ہے۔ کسی فاصلے کے بعد اِس کی رفتار اور نیز اِس کا اسراع معلوم کرو۔

فرض کرو کہ سِکے کو ایک یکساں دائری قرص سمجھا گیا ہے اور فرض کرو کہ اِس کا نصف قطر ا ہے۔ جب اِس کی رفتار مُستوی کے نیچے و ہوتی ہے تو اِس کی زاوئی رفتار $\frac{\text{و}}{\text{ا}}$ ہوگی۔ گردش کا محور سکہ کے مُستوی پر عمود ہے۔

اِس کے تشاکل کے نیم محور ا، ا ہوں گے جبکہ اِس کو پترا سمجھا جائے۔ مرکز میں سے گذرنے والے گردش کے محور کے گرد گھماؤ کا نصف قطر ر راؤتھ کے قاعدے کی بموجب



شکل (۱۴۵)

$$\text{گ}^2 = \frac{\text{ا}^2 + \text{ا}^2}{4} = \frac{1}{2}\,\text{ا}^2$$

ہے اور اس لیے توانائی بالحرکت

$$\frac{1}{2}\,\text{ک}\left[\text{و}^2 + \frac{1}{2}\,\text{ا}^2\left(\frac{\text{و}}{\text{ا}}\right)^2\right] = \frac{3}{4}\,\text{ک}\,\text{و}^2$$

ہے۔

مُستوی کے نیچے فاصلہ س تک لڑھکنے کے بعد سکہ کا مرکز ثقل فاصلہ س جب عہ تک گر چکتا ہے اور اس لئے توانائی کے بقاء کے اصول سے

$$\text{ک ج س جب عہ} = \frac{3}{4}\,\text{ک}\,\text{و}^2$$

اور اِس لیے رفتار مساوات

$$\text{و}^2 = \frac{4}{3}\,\text{س ج جب عہ}$$

سے حاصل ہوگی۔

ضابطہ (۴۸) سے مقابلہ کیا جائے یعنے $\text{و}^2 = 2\,\text{ع س}$ سے (ع = اسراع)

جہاں حرکت یکساں اسراع کے تحت ہے تو ہم دیکھتے ہیں کہ سکہ مُستوی کے نیچے یکساں اسراع $\frac{2}{3}$ ج جب عہ کے ساتھ لڑھکتا ہے۔

مثالیں

(۲۹۵) ۱۔ ثابت کرو کہ ایک حلقہ کا اسراع جو میلان عہ کی ایک پہاڑی پر سے نیچے لڑھک رہا ہے $\frac{1}{2}$ ج جب عہ ہے۔

۲۔ لوکوموٹف پہیوں کے ایک جوڑے کا اسراع معلوم کرو جو ۵۰ میں ا ڈھال کے نیچے دوڑ رہے ہیں، ہر پہیہ میں ایکساں موٹائی کی ایک کور اور آرے لگے ہوے ہیں، کور کا وزن آروں کے وزن کا دُگنا ہے اور محور کا وزن ایک پہیہ کے وزن کا نصف ہے۔ (محور کی موٹائی نظر انداز کرو)۔

۳۔ دو سیکل سوار جن کی سیکلیں ایک دوسرے کے ٹھیک مشابہ ہیں ایک پہاڑی کے نیچے اس کی چوٹی سے مساوی رفتاروں کے ساتھ حرکت کی ابتدا کر کے اُترتے ہیں۔ رگڑ کی قوتوں اور ہوا کی مزاحمت کو نظر انداز کر کے ثابت کرو کہ زیادہ بھاری سوار پہاڑی کے دامن میں پہلے پہنچے گا۔

۴۔ ایٹووڈ مشین کی چرخی کمیت ک کی ایک ایکساں قرص ہے۔ اگر کمیتیں $ک_۱$، $ک_۲$ ڈوری کے سروں سے لٹکائی جائیں تو ثابت کرو کہ $ک_۱$ کا اسراع

$$\frac{ک_۱ - ک_۲}{ک_۱ + ک_۲ + \frac{1}{2} ک}$$

ہے۔

۵۔ دو کُرے جن میں سے ایک کھوکھلا خول ہے اور دوسرا متجانس ٹھوس پہاڑی کی چوٹی سے ایک ساتھ حالت سکون سے نکل کر باہم پہاڑی کے نیچے لڑھکتے ہیں۔ ثابت کرو کہ راستے کے کسی حصہ پر اُن کے اوقات ۵ : $\sqrt{21}$ کی نسبت میں ہوں گے۔

۶۔ اگر ایک گاڑی کے پہیوں کی کمیتوں کو کور پر جمع شدہ فرض کیا جائے تو ثابت کرو کہ گاڑی کی توانائی جبکہ وہ رفتار و کے ساتھ حرکت کر رہی ہو $\frac{1}{2}$ ک $و^2$

ہے جہاں ک پوری گاڑی اور پہیوں کے وزنوں کا مجموعہ ہے ۔

۷ ۔ یکساں تار کے ایک سیدھے ٹکڑے کو ایک سرے پر انتصاباً استادہ کیا گیا اور گرنے چھوڑ دیا گیا ۔ وہ کس رفتار سے زمین سے ٹکرائے گا ۔

۸ ۔ سگار کی شکل کا ایک متجانس ٹھوس کرہ نما (نیم محور ا اور ب) اس کی نوک کے بل ایک افقی مستوی پر استادہ کیا گیا اور لڑھکنے کے لیے چھوڑ دیا گیا ۔ اسکی زاوئی رفتار معلوم کرو جبکہ اس کے محور اصغر کا سرا مستوی کے ساتھ تماس میں ہو اور اس لمحہ پر مستوی پر کا دباؤ معلوم کرو ۔

معیار حرکت کا معیار

۲۴۲ ۔ فرض کرو کہ کمیت ک کے کسی ذرہ کے محدد لا ، ما ، ی ہیں ۔ فرض کرو کہ کل حاصل قوت کے جو ذرہ پر عمل کرتی ہے اجزائے ترکیبی لا ، ما ، ے ہیں ۔ تب حرکت کی مساواتیں حاصل ہوتی ہیں :

$$ک \frac{فر^{2} لا}{فرت^{2}} = لا ،$$

$$ک \frac{فر^{2} ما}{فرت^{2}} = ما ،$$

$$ک \frac{فر^{2} ی}{فرت^{2}} = ے$$

ذرہ پر عمل کرنے والی قوت کا معیار محور لا کے گرد ما ے ۔ ی ما ہے (۲۹۶) اور اوپر کی مساواتوں سے حاصل ہوتا ہے

$$ما ے - ی ما = ک \left(ما \frac{فر^{2} ی}{فرت^{2}} - ی \frac{فر^{2} ما}{فرت^{2}} \right) \quad (۱۲۱)$$

ذرہ کی رفتار کے اجزائے ترکیبی $\frac{فر لا}{فرت}$ ، $\frac{فر ما}{فرت}$ ، $\frac{فر ی}{فرت}$ ہیں اور اس لئے

اِس رفتار کا معیار محور لا کے گرد حسب تعریف دفعہ (۲۱۹)

$$ما \frac{فری}{فرت} - ی \frac{فرما}{فرت}$$

ہے۔

ذرہ کا معیار حرکت اِس کی رفتار کا ک گنا ہے اور اِس لیے معیار حرکت کا معیار محور لا کے گرد، رفتار کے معیار کا ک گنا ہے اور اِس لیے

$$ک \left(ما \frac{فری}{فرت} - ی \frac{فرما}{فرت} \right)$$

ہے۔ تفرق کرنے پر حاصل ہوتا ہے:

$$\frac{فر}{فرت} \left[ک \left(ما \frac{فری}{فرت} - ی \frac{فرما}{فرت} \right) \right]$$

$$= ک \left[\left(\frac{فرما}{فرت} \frac{فری}{فرت} + ما \frac{فر^۲ی}{فرت^۲} \right) - \left(\frac{فری}{فرت} \frac{فرما}{فرت} + ی \frac{فر^۲ما}{فرت^۲} \right) \right]$$

$$= ک \left(ما \frac{فر^۲ی}{فرت^۲} - ی \frac{فر^۲ما}{فرت^۲} \right)$$

$$= ما ے - ی ما \qquad (۱۲۲)$$

مساوات (۱۲۱) سے۔

پس ہم نے ثابت کر دیا کہ

کسی محور کے گرد ایک ذرہ کے معیار حرکت کے معیار کی تبدیلی کی شرح، اُسی محور کے گرد اُس معیار کے مساوی ہوتی ہے جو ذرہ پر عمل کرنے والی قوتوں کا ہے۔

۲۴۳ — مساوات (۱۲۲)، اجسام کے کسی نظام کے ہر ذرہ کے لیے درست ہے۔ فرض کرو کہ ہم تمام ذروں کے لیے ایسی مساواتیں معلوم

کرتے ہیں اور اِن کو جمع کرتے ہیں تو حاصل ہوتا ہے

$$\frac{فر}{فرت}\left[\sum ک\left(ما \frac{فری}{فرت} - ی \frac{فرما}{فرت}\right)\right] = \sum(ما ے - ی ما) \quad \ldots\ldots(۱۲۳)$$

اِس مساوات کی بائیں جانب وہ جملہ ہے جو جسم پر یا اجسام پر عمل کرنے والی بیرونی قوتوں کے معیاروں کے مجموعہ کو تعبیر کرتا ہے کیونکہ اندرونی قوتیں مساوی اور مخالف قوتوں کے جوڑوں میں وقوع پذیر ہوتی ہیں اور اِس لیے اِس کا جملۂ بالا میں کوئی حصہ نہیں ہے۔ (۲۹۷)

جملہ $\sum ک\left(ما \frac{فری}{فرت} - ی \frac{فرما}{فرت}\right)$ کو جو جداگانہ ذرات کے معیارِ حرکت کے معیاروں کا مجموعہ ہے **نظام کے معیارِ حرکت کا معیار** کہتے ہیں۔

اس طرح مساوات (۱۲۳) سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ

کسی محور کے گرد کسی نظام کے معیارِ حرکت کے معیار میں تبدیلی کی شرح، اِس محور کے گرد بیرونی قوتوں کے معیاروں کے مجموعہ کے مساوی ہوتی ہے۔

۲۴۴ — اِس مسئلہ سے متعدد اہم نتیجے نکلتے ہیں:

۱۔ اگر اجسام کے کسی نظام پر کوئی بیرونی قوتیں عمل نہ کریں تو ہر محور کے گرد معیارِ حرکت کا معیار مستقل رہتا ہے۔

اِس سے وہ اصول بیان ہوتا ہے جس کو زاوئی معیارِ حرکت کا بقا کہتے ہیں۔

اِس کی ایک مثال سورج سے مہیا ہوتی ہے جس کے متعلق عملاً یہ فرض

کیا جا سکتا ہے کہ اِس پر کوئی بیرونی قوتیں عمل نہیں کرتیں۔ بالعموم یہ فرض کیا جاتا ہے کہ سورج حجم میں سُکڑ رہا ہے، اگر ایسا ہے تو ہم دیکھتے ہیں کہ اِس کے محور کے گِرد اِس کی گردش کی رفتار مسلسل بڑھنی چاہیئے تاکہ اِس کا معیارِ حرکت کا معیار مستقل رہ سکے۔

۲۔ اگر ایک نظام پر عمل کرنے والی تمام قوتیں ایک دیے ہوئے خط کے متوازی ہوں یا اِس خط کو قطع کریں تو نظام کے معیارِ حرکت کا معیار اِس خط کے گِرد مستقل رہنا چاہیئے۔

ایک لٹو پر صرف کیل پر کا تعامل اور جاذبہ عمل کرتے ہیں۔ ثانی الذکر کا معیار لٹو کے کیل میں سے گذرنے والے انتصابی خط کے گرد معدوم ہوتا ہے اور اول الذکر کا معیار تقریبی طور پر معدوم فرض کیا جا سکتا ہے اِس لئے لٹو کے کیل میں سے گذرنیوالے خط کے گرد معیارِ حرکت کا معیار مستقل رہے گا، تقریبی طور پر۔

۳۔ اگر ایک اُستوار جسم ایک ثابت محور کے گِرد گردش کرنے میں آزاد ہو اور اگر کسی لمحہ پر اِس کی زاوئی رفتار سہ ہو تو

$$ک\ گ^۲ \frac{فر سہ}{فر ت} = ل$$

جہاں ک گ^۲، ثابت محور کے گِرد جمود کا معیار ہے اور ل، اِس محور کے گِرد تمام بیرونی قوتوں کے معیاروں کا مجموعہ ہے۔

(۲۹۸) اِس کی تصدیق کے لیے صرف یہ دیکھنا ضروری ہے کہ کمیت ک کا ایک ذرہ جو محور سے فاصلہ ف پر ہے معیارِ حرکت ک ف سہ رکھتا ہے اور اس لیے پورے نظام کے معیارِ حرکت کا معیار

$$\Sigma\ ک\ ف^۲\ سہ = ک\ گ^۲\ سہ$$

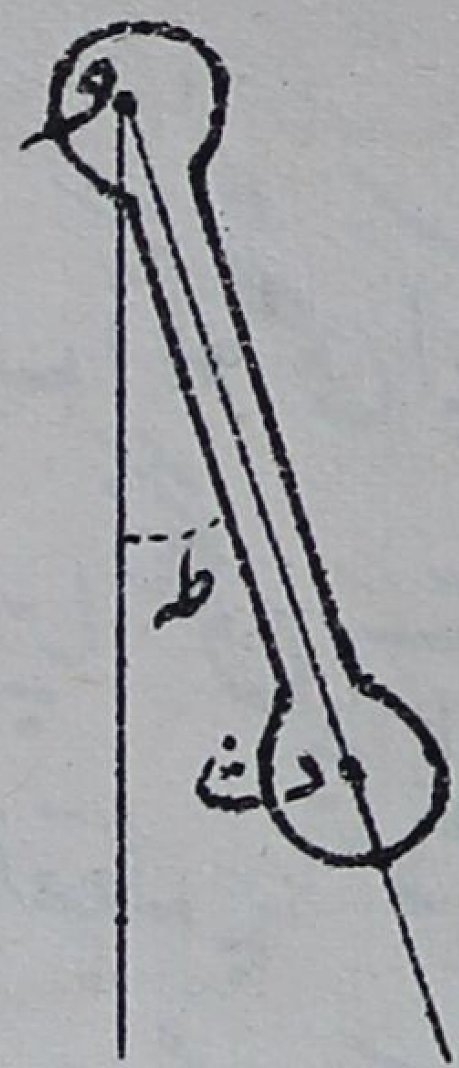
ہوگا اور چونکہ ک اور گ² وقت کے ساتھ متغیر نہیں ہوتے اِس لیے زاویائی معیارِ حرکت کی تبدیلی کی شرح $\text{ک گ}^2 \frac{\text{فرسہ}}{\text{فرت}}$ ہو گی۔

رقاص کا اہتزاز

۲۴۵ — پچھلے مسئلہ کا ایک اہم اطلاق یہ ہے کہ کسی قسم کے رقاص کے اہتزاز کا وقت معلوم کیا جا سکتا ہے۔

فرض کرو کہ و وہ نصاب ہے جس کے گرد رقاص گردش کرتا ہے، فرض کرو کہ اِس کا مرکزِ ثقل ث ہے اور و ث = ھ اور فرض کرو کہ خط و ث انتصابی کے ساتھ کسی لمحہ پر زاویہ طہ بناتا ہے اور اِس لیے رقاص کی زاویائی رفتار اِس کے محور کے گرد $\text{سہ} = \frac{\text{فرطہ}}{\text{فرت}}$ ہے۔

فرض کرو کہ پورے رقاص کی کمیت ک ہے اور گردش کا نصف قطر اِس کے محور کے گرد گ ہے۔



شکل (۱۴۶)

اب حرکت کی مساوات ہے

$$\text{ک گ}^2 \frac{\text{فرسہ}}{\text{فرت}} = \text{ل}$$

جس میں $\text{سہ} = \frac{\text{فرطہ}}{\text{فرت}}$ ، ل کی قیمت و میں سے گذرنے والے محور کے گرد وزن کے معیار کے مساوی ہے اور اِس لئے ک ج ھ جب طہ کے مساوی ہے۔

اِس لئے حرکت کی مساوات ہو جاتی ہے

$$\text{ک گ}^2 \frac{\text{فرسہ}}{\text{فرت}} = \text{ک ج ھ جب طہ} ،$$

یا

$$\frac{\text{گ}^{۲}}{\text{ھ}}\;\frac{\text{فر}^{۲}\,\text{طہ}}{\text{فرت}^{۲}} = \text{ج جب طہ} \qquad (۲۹۹)$$

طول ل کے سادہ رقاص کے لیے حرکت کی مساوات

$$\text{ل}\;\frac{\text{فر}^{۲}\,\text{طہ}}{\text{فرت}^{۲}} = \text{ج جب طہ}$$

ہے اور اِس لیے مقابلہ کرنے پر ہم دیکھتے ہیں کہ حرکت وہی ہے جو طول $\text{ل} = \frac{\text{گ}^{۲}}{\text{ھ}}$ کے سادہ رقاص کی ہوتی ہے۔

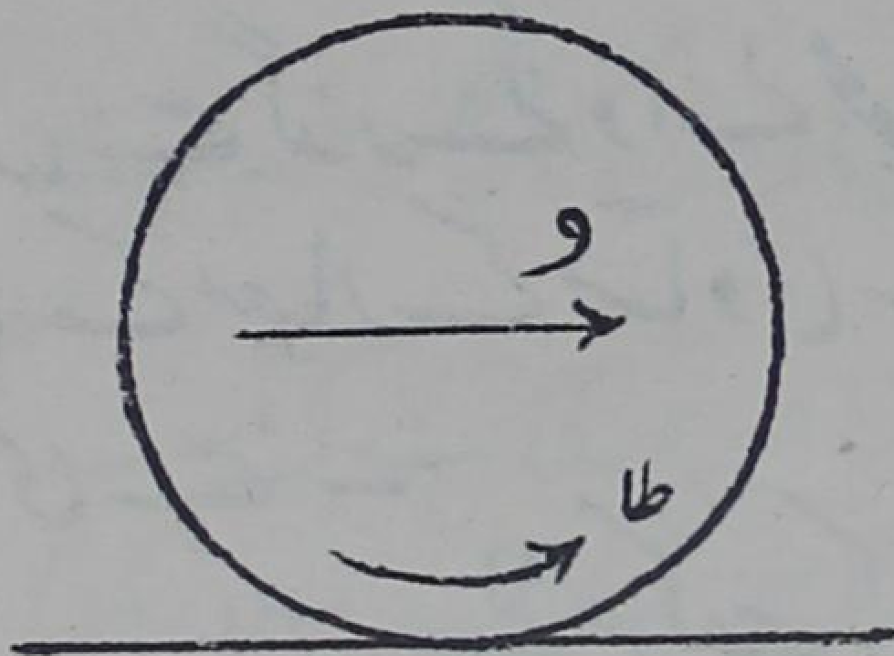
مثلاً چھوٹے اہتزازوں کا مکمل دَور

$$۲\pi\sqrt{\frac{\text{ل}}{\text{ج}}} = ۲\pi\sqrt{\frac{\text{گ}^{۲}}{\text{ج ھ}}}$$

ہے۔

توضیحی مثال

ایک انگوٹھی ایک میز پر انتصاباً اِستادہ ہے اور اِس کے ایک نقطہ پر انگلی سے بتدریج بڑھنے والا دباؤ اِس طریقہ پر ڈالا گیا ہے کہ جس نقطہ پر انگوٹھی میز کو مس کرتی ہے اُس کے میز پر پھسلنے سے توازن ٹوٹتا ہے۔ انگوٹھی کی وقوع پذیر حرکت معلوم کرو۔



شکل (۱۴۷)

مثال (۲) صفحہ ۱۵۸ میں ہم دیکھ چکے ہیں کہ متذکرہ صدر طریقہ پر دباؤ ڈالنا ممکن ہے۔

فرض کرو کہ انگوٹھی جب انگلی کو چھوڑتی ہے تو یہ مشاہدہ کیا گیا کہ انگوٹھی رفتار و کے ساتھ آگے حرکت کرتی ہے اور گردش طا کے ساتھ اُس سمت کے مخالف گھومتی ہے جس میں وہ گھومتی اگر بغیر پھسلے وہ لڑھکتی۔ فرض کرو کہ کسی لمحہ پر رفتار اور گردش کی قیمتیں و اور سہ ہیں جن کی پیمائش علی الترتیب و اور طا کی سمتوں میں کی گئی ہے۔

فرض کرو کہ انگوٹھی کا نصف قطر ا اور کمیت ک ہے۔ اِس پر عمل کرنیوالی قوتیں حسب ذیل ہیں:

(ا) اِس کا وزن ک ج،

(ب) میز کے ساتھ اِس کے تعامل کا انتصابی جزو ترکیبی جو ک ج کے مساوی ہے کیونکہ انگوٹھی کا مرکز ثقل کوئی انتصابی اسراع نہیں رکھتا،

(ج) انگوٹھی کے زیر ترین نقطہ پر فرکی تعامل، جو ک ج مہ کے مساوی ہے جب تک کہ پھسلن واقع ہوتی ہے۔

دفعہ (۱۸۰) کے مسئلہ کی رُو سے

$$ک \frac{فرو}{فرت} = -ک ج مہ \qquad (ا)$$

ہم ایک اور مساوات دفعہ ۲۴۳ کے مسئلہ سے حاصل کر سکتے ہیں۔ فرض کرو کہ لمحہ ت پر انگوٹھی کا جو محور ہے اِس کو ہم محور لیتے ہیں۔ اِس لمحہ پر جمود کا معیار ک ا^{2} ہے۔ معیار حرکت کا معیار حاصل کرنے کے لیے ہم کُل حرکت کو دو حرکتوں سے مرکب سمجھتے ہیں: (۱) مرکز ثقل کی حرکتِ انتقال (رفتار و) اور (۲) مرکز ثقل میں سے گذرنے والے ایک محور کے گرد گردش کی حرکت (رفتار سہ)۔ اول الذکر کا کوئی اثر معیار حرکت کے معیار پر نہیں ہے اور اس لیے معیار حرکت کا کُل معیار

(۳۰۰)

ک ا^۲ سہ

ہے ۔

چھوٹے وقفے فرت کے ختم پر انگوٹھی فاصلہ و فرت تک آگے حرکت کر چکی ہوگی اور اس لیے اب ہم ایک ایسے محور کے گرد جمود کے معیار پر غور کر رہے ہیں جو انگوٹھی کے مرکز ثقل سے فاصلہ د فرت پر ہے اور اس لیے حسب دفعہ ۲۳۵ وقفہ فرت کے بعد جمود کا معیار

ک [ا^۲ + (د فرت)^۲]

ہے ۔

لیکن ہم دوسرے رتبہ کی چھوٹی مقدار (فرت)^۲ کو نظر انداز کر سکتے ہیں اور جمود کے معیار کو مستقل اور ک ا^۲ کے مساوی سمجھ سکتے ہیں ۔ اس لیے معیار حرکت کے معیار کے اضافہ کی شرح ک ا^۲ فرسہ / فرت ہے ۔

بیرونی قوتوں کا معیار اُس محور کے گرد اور اُسی سمت میں

- ک ج مہ ا

ہے اور اس لیے مساوات

ک ا^۲ فرسہ / فرت = - ک ج مہ ا (ب)

یا ا فرسہ / فرت = - مہ ج (ج)

حاصل ہوتی ہے اور مساوات (ا)

فرد / فرت = - مہ ج (د)

میں تحویل ہوتی ہے ۔

اِن رشتوں سے و اور سہ کے گھٹاؤ کی شرحیں حاصل ہوتی ہیں جب تک کہ پھسلن واقع ہو رہی ہو ۔ صریحاً پھسلن رُک جاتی ہے جوں ہی د + سہ ا = ۔ کیونکہ

و + سہ ا ، انگوٹھی کے زیر ترین نقطہ کی آگے وار رفتار ہے ۔ مساواتوں (ج) اور (د) سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{ف}{فرت} (و + سہ ا) = - ۲ مہ ج$$

اور ابتداً و + سہ ا کی قیمت و + طا ا ہے ۔ اِس لیے و + ا کو صفر میں تحویل ہونے کے لیے وقت

$$\frac{و + طا ا}{۲ مہ ج}$$

مطلوب ہے ۔ اِس وقفہ کے بعد پھسلن رک جاتی ہے ۔ اِس لمحہ پر انگوٹھی کی رفتار و حسب ذیل مساوات سے حاصل ہوتی ہے :

$$و = و - مہ ج \left(\frac{و + طا ا}{۲ مہ ج} \right)$$

$$= \frac{1}{2} (و - طا ا)$$

اِس لیے حرکت آگے وار یا پیچھے وار ہوگی بموجب اِس کے کہ ابتدائی رفتار و > یا < طا ا ۔ پھسلن ایک دفعہ رُک جانے کے بعد اِس کو پھر شروع کرنے کے لیئے کوئی قوت نہیں ہے اور اِس لیے انگوٹھی صرف یکساں رفتار و کے ساتھ لڑھکتی جائے گی ۔ اگر و > طا ا تو وہ اپنے ابتدائی نقطہ حرکت سے دُور لڑھکتی جائے گی لیکن اگر و < طا ا تو وہ اپنے ابتدائی نقطہ حرکت پر واپس آئے گی ۔

مثالیں

(۳۰۱)

۱ ۔ ایک دروازہ کے قبضوں کا خط انتصابی کے ساتھ زاویہ عہ بناتا ہے اور دروازہ اپنے توازن کے محل کے گرد گھومتا ہے ۔ ثابت کرو کہ اِس کی حرکت وہی ہے جو ایک خاص سادہ رقاص کی ہے ، اِس رقاص کا طول معلوم کرو ۔

۲ ۔ ایک نشانہ دھات کی ایک مربع تختی سے بنا ہے جس کا کنارہ ا اور

کمیت ک ہے۔ اِس کے بلند ترین کنارہ پر قبضہ لگا ہوا ہے اور یہ کنارہ افقی ہے۔ نشانہ کی سُکون کی حالت میں اِس پر ایک گولی کی ضرب پڑتی ہے جس کی کمیّت گ ہے اور جو رفتار و کے ساتھ حرکت کرتی ہوئی نشانہ کے ایک ایسے نقطہ پر لگتی ہے جو قبضوں کے خط کے نیچے گہرائی گ پر ہے۔ نشانہ کی وقوع پذیر حرکت معلوم کرو۔

۳۔ ایک متجانس کرہ کو بغیر گردش کے ایک کھردرے مائل مُستوی پر پھینکا گیا ہے، مُستوی کا میلان ع ہے اور رگڑ کی قدر م ہے۔ ثابت کرو کہ وہ وقت جس کی اثناء میں کرہ مُستوی پر چڑھتا ہے وہی ہے جو ہوتا اگر مُستوی چکنا ہوتا، نیز ثابت کرو کہ وہ وقت جس میں کرہ پھسلتا ہے اُس وقت کے ساتھ جس میں وہ لڑھکتا ہے نسبت ۲ مس ع : ۷ م رکھتا ہے۔

۴۔ نصف قطر ا کا ایک کرہ، نصف قطر ب کے ایک کروی پیالے کی مقعر سطح پر کے ایک نقطہ پر سکون کی حالت میں پکڑا گیا ہے۔ اِس کو اچانک آزاد چھوڑ کر سطح پر نیچے لڑھکنے دیا گیا۔ ثابت کرو کہ اِن دو کروں کے مرکزوں کو ملانیوالا خط اُسی طریقہ پر جھولتا ہے جس طرح طول $\frac{7}{5}$ (ب - ا) کا ایک سادہ رقاص۔

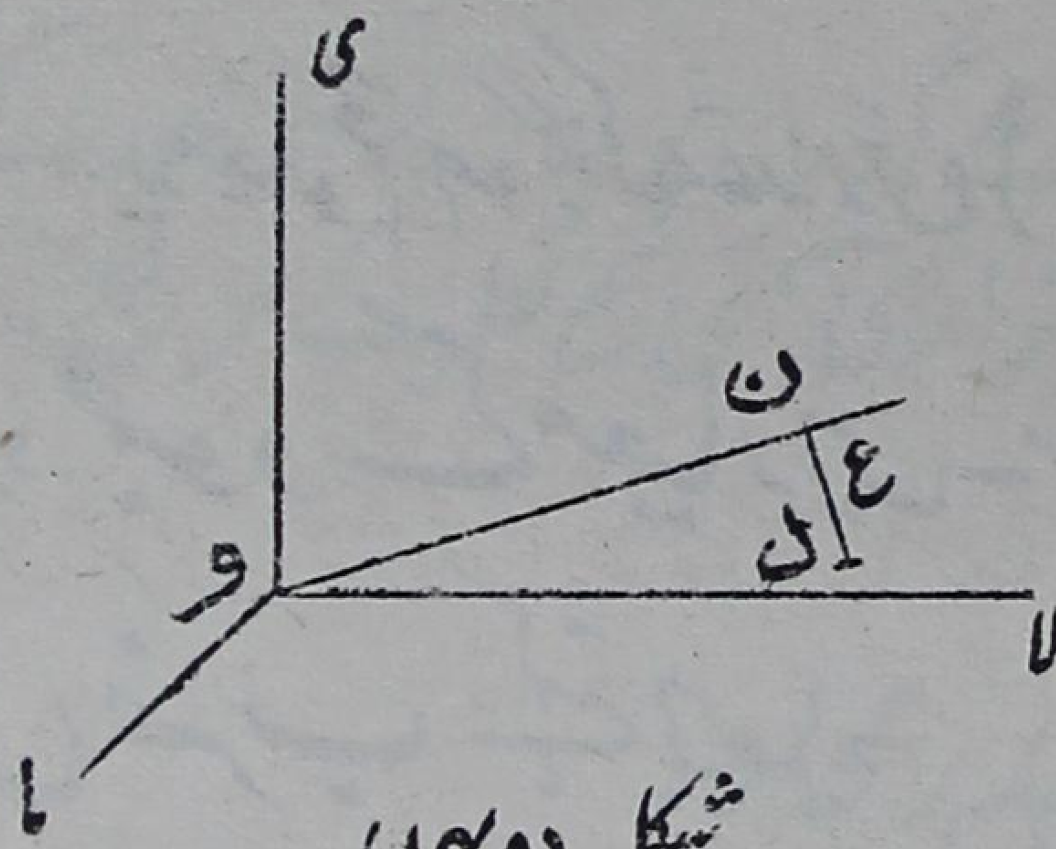
۵۔ نصف قطر ا کے ایک کرہ کو نصف قطر ب کے ایک کرہ کی کھردری محدب سطح کے بلند ترین نقطہ پر سُکون کی حالت میں پکڑا گیا ہے۔ پھر اِس کو آزاد چھوڑ کر اِس کو کرہ کی سطح کے نیچے لڑھکنے دیا گیا۔ ثابت کرو کہ کرے جدا ہوں گے جبکہ اِن کے مرکزوں کو ملانے والا خط انتصابی کے ساتھ زاویہ جم$^{-1}$ $\frac{1}{1۷}$ بنائے۔ صورت ب = ۰ کا امتحان کرو۔

۶۔ ایک دائری حلقہ ایک چکنے افقی مُستوی پر حرکت کرنے میں آزاد ہے، اِس پر ایک چھوٹی انگوٹھی جس کی کمیت حلقہ کی کمیت کا $\frac{1}{ن}$ واں حصہ ہے پھسلتی ہے اور اِن دونوں کے درمیان رگڑ کی قدر م ہے۔ ابتداً حلقہ ساکن تھا اور انگوٹھی حلقہ کے گرد زاوی رفتار س کے ساتھ حرکت کر رہی تھی ثابت کرو کہ انگوٹھی وقت $\frac{ن+1}{م س}$ کے بعد حلقہ کے لحاظ سے ساکن ہو جائے گی۔

جمود کے معیاروں کا عام نظریہ

جمود کے سر

۲۲۶ — فرض کرو کہ ایک اُستوار جسم گردش کے ایک محور کے گِرد گردش کر رہا ہے اور گردش کے محور کی سمتی جیوب التمام کسی تین ثابت محوروں کے حوالے سے ل، م، ن ہیں۔ فرض کرو کہ گردش کے محور پر کوئی نقطہ و مبداء لیا گیا ہے اور فرض کرو کہ ل، کمیت ک، کا کوئی ذرّہ ہے جس کا فاصلہ گردش کے محور سے ع ہے۔ فرض کرو کہ ل کے محدد لا، ما، ی ہیں اور ل ن (= ع)، ل سے گردش کے محور پر عمود ہے۔



شکل (۱۴۸)

چونکہ

$$\text{و ل}^2 = \text{لا}^2 + \text{ما}^2 + \text{ی}^2 \qquad (۳۰۲)$$

اور

$$\text{و ن}^2 = (\text{ل لا} + \text{م ما} + \text{ن ی})^2$$

اسلیے

$$\text{ع}^2 = \text{و ل}^2 - \text{و ن}^2$$

$$= \text{لا}^2 + \text{ما}^2 + \text{ی}^2 - (\text{ل لا} + \text{م ما} + \text{ن ی})^2$$

$$= \text{لا}^2(\text{م}^2 + \text{ن}^2) + \text{ما}^2(\text{ن}^2 + \text{ل}^2) + \text{ی}^2(\text{ل}^2 + \text{م}^2)$$
$$- ۲\,\text{م ن} \times \text{ما ی} - ۲\,\text{ن ل} \times \text{ی لا} - ۲\,\text{ل م} \times \text{لا ما}$$

$$= \text{ل}^2(\text{ما}^2 + \text{ی}^2) + \text{م}^2(\text{ی}^2 + \text{لا}^2) + \text{ن}^2(\text{لا}^2 + \text{ما}^2)$$
$$- ۲\,\text{م ن} \times \text{ما ی} - ۲\,\text{ن ل} \times \text{ی لا} - ۲\,\text{ل م} \times \text{لا ما}$$

پس جمود کا معیار مہ، مساوات

$$\text{مہ} = \Sigma\, \text{ک}_1\, \text{ع}^2$$

= ل^{2} Σ ک (ما^{2} + ی^{2}) + م^{2} Σ ک (ی^{2} + لا^{2}) + ن^{2} Σ ک (لا^{2} + ما^{2})

− ۲ م ن Σ ک ما ی − ۲ ن ل Σ ک ی لا − ۲ ل م Σ ک لا ما

= ل^{2} ا + م^{2} ب + ن^{2} ج − ۲ م ن د − ۲ ن ل ع − ۲ ل م ف

........(۱۲۴)

سے حاصل ہوگا جہاں

ا = Σ ک (ما^{2} + ی^{2})، وغیرہ

د = Σ ک ما ی، وغیرہ

یہ معلوم ہوگا کہ مقداریں ا، ب، ج علی الترتیب محوروں لا، ما، ی کے گرد جمود کے معیار ہیں۔ مقداروں د، ع، ف کو جمود کے حاصل ضرب کہتے ہیں۔

مساوات (۱۲۴) میں ل، م، ن کو مختلف قیمتیں دینے سے و میں سے گذرنے والے کسی خط کے گرد جمود کا معیار معلوم ہو سکتا ہے جب کہ چھہ سروں ا، ب، ج، د، ع، ف کی قیمتیں معلوم ہو جائیں۔

جمود کا ناقص نما

۲۴۷ — مساوات

ا لا^{2} + ب ما^{2} + ج ی^{2} − ۲ د ما ی − ۲ ع ی لا − ۲ ف لا ما = ک

جہاں ک کوئی مستقل ہے ایک مخروطی نما کو تعبیر کرتی ہے کیونکہ وہ دوسرے درجہ کی مساوات ہے۔ اگر سمتی جیوب التمام ل، م، ن کا سمتی نیم قطر رہو تو

$$ر^2 (ا ل^2 + ب م^2 + ج ن^2 - ۲ د م ن - ۲ ع ن ل - ۲ ف ل م) = ک$$

یا مساوات (۱۲۴) سے

$$ر^2 = \frac{ک}{م} \qquad (۱۲۵)$$

(۳۰۳)

چونکہ ل، م، ن کی تمام قیمتوں کے لیے م مثبت ہے اِس لیے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ سمتی نیم قطر کی تمام سمتوں کے لیے $ر^2$ مثبت ہے۔ اِس لیے مخروطی نما، ایک ناقص نما ہے۔

اِس ناقص نما کو نقطہ و کا جمود کا ناقص نما کہتے ہیں۔

مساوات (۱۲۵) کو لکھا جا سکتا ہے

$$م = \frac{ک}{ر^2}$$

جس سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ و میں سے گذرنے والے کسی محور کے گرد جمود کا معیار، جمود کے ناقص نما کے متوازی سمتی نیم قطر کے مربع کے بالعکس متناسب ہوتا ہے۔

جمود کے صدر محاور

۲۴۸ — ناقص نما کی اِس طبیعی خاصیت سے یہ ظاہر ہے کہ ناقص نما خود وہی رہتا ہے خواہ محددوں کے محور کوئی بھی منتخب کئے جائیں۔ ناقص نما کے تین صدر محور ہیں جو باہم علی القوائم ہیں۔ اِن محوروں کی سمتوں کو نقطہ و پر جمود کے صدر محاور کہا جاتا ہے۔

اگر نقطہ و پر کے جمود کے صدر محوروں کو محددوں کے محور لیا جائے تو ناقص نما کی مساوات میں م ای، ی لا، لا ما کے سر غائب ہونے چاہئیں اِس لیے

$$د = ع = ف = ۰$$

پس و پر جمود کے صدر محوروں کو محددوں کے محور لینے سے مساوات

شکل ذیل اختیار کرتی ہے: (۱۲۴)

$$م = ل^۲ ا + م^۲ ب + ن^۲ ج$$

زاوئی رفتار طا کی گردش کی توانائی بالحرکت

$$\frac{۱}{۲} م طا^۲ = \frac{۱}{۲} (ل^۲ ا + م^۲ ب + ن^۲ ج) طا^۲$$

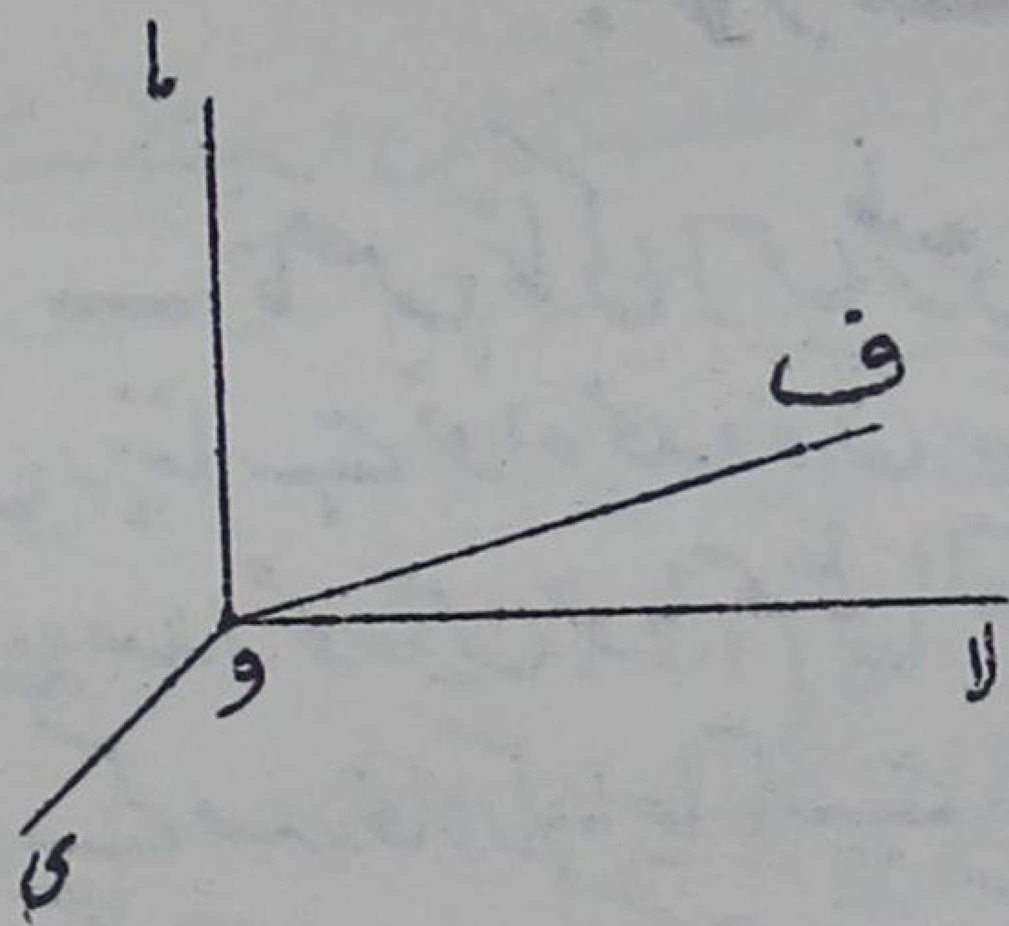
$$= \frac{۱}{۲} (ا سہ_۱^۲ + ب سہ_۲^۲ + ج سہ_۳^۲) \quad (۱۲۶)$$

ہے جہاں طا کے اجزائے ترکیبی سہ۱، سہ۲، سہ۳ ہیں (دیکھو دفعہ ۲۳۲)۔

اُستوار جسم کی حرکت کی عام مساواتیں

(۳۰۴)

۲۴۹ — فرض کرو کہ اُستوار جسم کا کوئی نقطہ و ہے اور فرض کرو کہ ولا، وما، وی محوروں کا ایک جٹ ہے جو حرکت کرتا ہے اس طریقہ پر کہ نقطہ و اُستوار جسم میں اپنا محل قائم رکھتا ہے اور محاور اپنے ابتدائی محل کے متوازی رہتے ہیں۔



شکل (۱۴۹)

فرض کرو کہ و کی رفتار کے اجزائے ترکیبی ان محوروں پر ع، و، ط ہیں — ان محوروں کے لحاظ سے اُستوار جسم کی حرکت کسی محور وف کے گرد جو و میں سے گذرے گردش کی حرکت ہوگی —

فرض کرو کہ یہ گردش تین محوروں کے گرد گردشوں سہ لا، سہ ما، سہ ی سے مرکب ہے —

فرض کرو کہ ان محوروں کے لحاظ سے اُستوار جسم کے کسی نقطہ کے

محدد لا، ما، ی ہیں۔ اس فریم کے لحاظ سے جو و کے ساتھ حرکت کرنے والے محوروں سے فراہم ہوتا ہے نقطہ لا، ما، ی کی رفتار کے اجزائے ترکیبی

$$\frac{\text{فر لا}}{\text{فر ت}} ، \frac{\text{فر ما}}{\text{فر ت}} ، \frac{\text{فر ی}}{\text{فر ت}}$$

ہیں اور فضا میں اس فریم کی رفتار کے اجزائے ترکیبی

ع، و، ط

ہیں۔ اس لیے نقطہ لا، ما، ی کی کُل رفتار کے اجزائے ترکیبی

$$\text{ع} + \frac{\text{فر لا}}{\text{فر ت}} ، \text{و} + \frac{\text{فر ما}}{\text{فر ت}} ، \text{ط} + \frac{\text{فر ی}}{\text{فر ت}}$$

ہیں۔

فرض کرو کہ کسی لمحہ پر محوروں لا، ما، ی کے گرد بیرونی قوتوں کے معیاروں کے مجموعے علی الترتیب ل، م، ن سے تعبیر ہوتے ہیں تو حسب دفعہ (۲۴۳)

$$\text{ل} = \Sigma\, (\text{ما ے} - \text{ی ما})\text{، وغیرہ}$$

نقطہ لا، ما، ی پر کمیت ک کے ذرہ کے معیار حرکت کا معیار محور لا کے گرد

$$\text{ک} \left[\text{ما} \left(\text{ط} + \frac{\text{فر ی}}{\text{فر ت}}\right) - \text{ی} \left(\text{و} + \frac{\text{فر ما}}{\text{فر ت}}\right) \right]$$

ہے۔ پس دفعہ (۲۴۳) کے مسئلہ کی رُو سے

$$\text{ل} = \frac{\text{فر}}{\text{فر ت}} \Sigma\, \text{ک} \left[\text{ما} \left(\text{ط} + \frac{\text{فر ی}}{\text{فر ت}}\right) - \text{ی} \left(\text{و} + \frac{\text{فر ما}}{\text{فر ت}}\right) \right] \quad (۱۲۷) \qquad (۳۰۵)$$

علیٰ ہذا دوسرے محوروں کے لیے مشابہ مساواتیں ہیں۔

۲۵۰ — محددوں کے متحرک محوروں کے لحاظ سے ذرہ ک کے محدد لا، ما، ی ہیں اور اس لیے و لا کے گرد گردش سے لا سے ذرہ کی جو رفتار حاصل ہوتی ہے اُس کے اجزائے ترکیبی

$$\text{۰}\,،\; -\,\text{سہ}_{\text{لا}}\,\text{ی}\,،\; -\,\text{سہ}_{\text{لا}}\,\text{ما}$$

ہیں —

اسی طرح گردشوں سہما ، سہی سے جو رفتاریں حاصل ہوتی ہیں اِن کے اجزائے ترکیبی

$$\text{سہ}_{\text{ما}}\,\text{ی}\,،\; \text{۰}\,،\; -\,\text{سہ}_{\text{ما}}\,\text{لا}$$

اور

$$-\,\text{سہ}_{\text{ی}}\,\text{ما}\,،\; \text{سہ}_{\text{ی}}\,\text{لا}\,،\; \text{۰}$$

ہیں —

اِن رفتاروں کو مرکب کرنے سے حاصل رفتار کے اجزائے ترکیبی متذکرۂ محوروں کے لحاظ سے حسب ذیل حاصل ہوتے ہیں :

$$\frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}} = \text{سہ}_{\text{ما}}\,\text{ی} - \text{سہ}_{\text{ی}}\,\text{ما}\,،$$

$$\frac{\text{فرما}}{\text{فرت}} = \text{سہ}_{\text{ی}}\,\text{لا} - \text{سہ}_{\text{لا}}\,\text{ی}\,،$$

$$\frac{\text{فری}}{\text{فرت}} = \text{سہ}_{\text{لا}}\,\text{ما} - \text{سہ}_{\text{ما}}\,\text{لا}$$

اس طرح

$$\text{ما}\,\frac{\text{فری}}{\text{فرت}} - \text{ی}\,\frac{\text{فرما}}{\text{فرت}} = \text{سہ}_{\text{لا}}\left(\text{ما}^{2} + \text{ی}^{2}\right) - \text{سہ}_{\text{ما}}\,\text{لا}\,\text{ما} - \text{سہ}_{\text{ی}}\,\text{لا}\,\text{ی}$$

اور ت کے لحاظ سے اس مساوات کو تفرق کرنے پر مساوات (۱۲۷) کے دائیں جانبی رکن کے ایک حصہ کی قیمت حسب ذیل حاصل ہوتی ہے:

$$\frac{\text{فر}}{\text{فرت}}\left[\Sigma\,\text{ک}\left(\text{ما}\,\frac{\text{فری}}{\text{فرت}} - \text{ی}\,\frac{\text{فرما}}{\text{فرت}}\right)\right]$$

$$= \Sigma\,\text{ک}\left(\text{ما}^{2} + \text{ی}^{2}\right)\frac{\text{فرسہ}_{\text{لا}}}{\text{فرت}} - \Sigma\,\text{ک}\,\text{لا}\,\text{ما}\,\frac{\text{فرسہ}_{\text{ما}}}{\text{فرت}} - \Sigma\,\text{ک}\,\text{لا}\,\text{ی}\,\frac{\text{فرسہ}_{\text{ی}}}{\text{فرت}}$$

$$- \Sigma\,\text{ک}\,\text{ما}\,\text{ی}\left(\text{سہ}_{\text{ما}}^{2} - \text{سہ}_{\text{ی}}^{2}\right) + \Sigma\,\text{ک}\left(\text{ما}^{2} - \text{ی}^{2}\right)\text{سہ}_{\text{ما}}\,\text{سہ}_{\text{ی}}$$

- Σ ک ی لا سہ سہ لا + Σ ک لا ما سہ ی سہ لا

= ا فر سہ لا / فر ت - ف فر سہ ما / فر ت - ع فر سہ ی / فر ت

- د (سہ ما ۲ - سہ ی ۲) - (ب - ج) سہ ما سہ ی - ع سہ ما سہ لا

+ ف سہ ی سہ لا

۲۵۱ ــ فرض کرو کہ اُستوار جسم کے مرکز ثقل کے محدد لاَ ، ماَ ، یَ ہیں (۳۰۶)

اور اس کی کل کمیت ک ہے ـ اب

Σ ک لا = ک لاَ ، وغیرہ

اِس لیے مساوات (۱۲۷) کے دائیں جانبی رکن کے بقیہ حصہ کی قیمت حسب ذیل ہے :

فر / فر ت Σ ک (ما ط - ی و) = فر / فر ت (ک ماَ ط - ک یَ و)

= ک فر / فر ت (ماَ ط - یَ و)

پس مساوات (۱۲۷) حسب ذیل شکل اختیار کرتی ہے :

ک فر / فر ت (ماَ ط - یَ و) + ا فر سہ لا / فر ت - ف فر سہ ما / فر ت

- ع فر سہ ی / فر ت - د (سہ ما ۲ - سہ ی ۲) - (ب - ج) سہ ما سہ ی

- ع سہ ما سہ لا + ف سہ ی سہ لا = ل (۱۲۸)

اگر محوروں پر کُل اجزائے ترکیبی Σ لا ، Σ ما ، Σ ی سے

تعبیر ہوں تو دفعہ (۱۸۰) کی رو سے حسب شکل ذیل مزید مساواتیں حاصل ہوتی ہیں :

$$\text{ک}\,\frac{\text{فر}}{\text{فرت}}\left(\text{۶}+\frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}}\right) = \text{ع}\ \text{۷} \qquad (129)$$

مساواتیں (۱۲۸) اور (۱۲۹) اور اِن کے متناظر دوسرے دو محوروں کے لحاظ سے مساواتوں کے دو دوسرے زوج ایک اُستوار جسم کی حرکت کی مساواتیں ہیں جبکہ یہ جسم کسی قوتوں کے تحت حرکت کر رہا ہو۔

یولر کی مساواتیں

۲۵۲ — اب فرض کرو کہ محوروں کا ایک دوسرا جٹ ہے جس کو ہم ۱، ۲، ۳ سے تعبیر کریں گے۔ فرض کرو کہ یہ محور حرکت کرتے ہیں اس طور پر کہ اِن کا محل استوار جسم میں ہمیشہ وہی رہتا ہے، نقطہ و (جس کے متعلق ہم فرض کر چکے ہیں کہ وہ ہمیشہ اُستوار جسم میں ایک ہی محل پر قائم رہتا ہے) ان محوروں کا مبدا ہے۔ فرض کرو کہ زیر بحث لمحہ یہ محاور ۱، ۲، ۳ محوروں لا، ما، ی پر منطبق ہوتے ہیں۔ تب محوروں ۱، ۲، ۳ کے حوالے سے جمود کے سروں کی جو قیمتیں حاصل ہوں گی وہ وہی ہونگی جو محوروں لا، ما، ی کے حوالے سے حاصل ہوئی تھیں یعنی ا، ب، ج، د، ع، ف۔ (۲۰۷)
مزید بریں وہ تمام رفتاریں جن کا حوالہ محوروں ۱، ۲، ۳ کے ذریعہ دیا گیا ہو وہی قیمتیں رکھیں گی جو وہ رکھتیں اگر اِن کا حوالہ محوروں لا، ما، ی سے دیا جاتا۔ فرض کرو کہ محوروں ۱، ۲، ۳ کے گرد گردشیں سم_1، سم_2، سم_3 ہیں تو زیر بحث لمحہ پر ہمیں حاصل ہوگا

$$\text{سم}_1 = \text{سم}_{\text{لا}}\ ،\ \text{سم}_2 = \text{سم}_{\text{ما}}\ ،\ \text{سم}_3 = \text{سم}_{\text{ی}}$$

اِس کا کسی لمحہ پر درست ہونا ضروری نہیں ہے اِلّا اُس لمحہ کے جس پر محور منطبق ہوتے ہیں اور اس لیے وقت کے لحاظ سے اِن مساواتوں کا

تفرق کرنا اور اِس سے

$$\frac{فر سہ_۱}{فر ت} = \frac{فر سہ_لا}{فر ت} \text{ وغیرہ}$$

اخذ کرنا درُست نہیں ہے۔ تاہم یہ ثابت کیا جا سکتا ہے کہ یہ آخری نتیجہ زیر بحث لمحہ پر درست ہے۔ فرض کرو کہ و میں سے گذرنے والا کوئی خط وق سے تعبیر ہوتا ہے، فرض کرو کہ محوروں ۱، ۲، ۳ کے لحاظ سے اِس خط کی سمتی جیوب التمام جم عہ، جم بہ، جم جہ ہیں اور فرض کرو کہ وق کے گرد زاویائی رفتار کا جزو ترکیبی طاق ہے۔ اگر ایک محور وف کے گرد جسکی سمتی جیوب التمام محوروں ۱، ۲، ۳ کے حوالے سے ل، م، ن ہیں حاصل زاویائی رفتار کی مقدار طا ہو تو

$$طاق = طا \text{ جم } ف و ق$$

$$= طا (ل \text{ جم عہ} + م \text{ جم بہ} + ن \text{ جم جہ})$$

$$= سہ_۱ \text{ جم عہ} + سہ_۲ \text{ جم بہ} + سہ_۳ \text{ جم جہ}$$

خط وق خواہ کوئی ہو یہ مساوات ہمیشہ درست ہوگی، اِس لیے ہم اِس کو وقت کے لحاظ سے تفرق کر سکتے ہیں اور اِس طرح حاصل کرتے ہیں

$$\frac{فر طاق}{فر ت} = \frac{فر سہ_۱}{فر ت} \text{ جم عہ} + \frac{فر سہ_۲}{فر ت} \text{ جم بہ} + \frac{فر سہ_۳}{فر ت} \text{ جم جہ}$$

$$- سہ_۱ \text{ جب عہ} \frac{فر عہ}{فر ت} - سہ_۲ \text{ جب بہ} \frac{فر بہ}{فر ت} - سہ_۳ \text{ جب جہ} \frac{فر جہ}{فر ت}$$

$$\text{...........} (۱۳۰)$$

اب فرض کرو کہ خط وق، ولا پر منطبق ہوتا ہے تو طاق = سہ_لا۔ زیر بحث لمحہ پر بہ = جہ = $\frac{\pi}{2}$، عہ = ۰۔ نیز $\frac{فر بہ}{فر ت}$ وہ شرح ہے جس سے ولا اور محور ۱ کا درمیانی زاویہ بڑھتا ہے اور صریحاً یہ سہ_۳ ہے۔ اسی طرح $\frac{فر جہ}{فر ت} = - سہ_۲$، اور $\frac{فر عہ}{فر ت} = ۰$۔

(۳۰۸

ان تمام اندراجات کو عمل میں لانے سے ہم یہ معلوم کرتے ہیں کہ زیر بحث لمحہ پر جس پر محوروں کے یہ دو جٹ ایک دوسرے پر منطبق ہوتے ہیں مساوات (۱۳۰) شکل

فرسـلا / فرت = فرسـ۱ / فرت − سـ۲ × سـ۳ + سـ۳ × سـ۲

= فرسـ۱ / فرت

اختیار کرتی ہے۔ پس زیر بحث لمحہ پر رشتے

سـلا = سـ۱، وغیرہ

اور نیز

فرسـلا / فرت = فرسـ۱ / فرت وغیرہ

حاصل ہوتے ہیں۔

اب فرض کرو کہ مبداء یا تو ایک ثابت نقطہ ہے یا جسم کا مرکز ثقل۔ پہلی صورت میں

ع = و = ط = ۰، ہمیشہ

دوسری صورت میں

لا̄ = ما̄ = ی̄ = ۰، ہمیشہ

نیز فرض کرو کہ حوالے کے محور، جمود کے صدر محور منتخب کئے گئے ہیں جو مبداء میں سے گذرتے ہیں تو

د = ع = ف = ۰

یہ تمام اندراجات مساوات (۱۲۸) اور اس کے مشابہ دو مساواتوں میں کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ یہ مساواتیں شکل

ا فرسـ۱ / فرت − (ب − ج) سـ۲ سـ۳ = ل　　(۱۳۱)

ب فرسـ۲ / فرت − (ج − ا) سـ۳ سـ۱ = م　　(۱۳۲)

$$\text{ج}\,\frac{\text{فرسہ}_{3}}{\text{فرت}} - (\text{أ} - \text{ب})\,\text{سہ}_{1}\,\text{سہ}_{2} = \text{ن} \qquad (133)$$

اختیار کرتی ہیں ۔ اِن مساواتوں کو یولر کی مساواتیں کہا جاتا ہے ۔

(۳۰۹)

سیّارہ کی گردش

۲۵۳ — اِن مساواتوں کے استعمال کی پہلی مثال کے طور پر فرض کرو کہ ہم ایک اُستوار جسم کی حرکت کا امتحان کرتے ہیں جو ایک محور کے گرد متشاکل ہے اور ایسی قوتوں کے زیرِ عمل ہے جو سب کی سب مرکزِ ثقل میں سے گذرتی ہیں ۔ یہ شرطیں تقریبی طور پر اُن شرطوں کو تعبیر کرتی ہیں جو حاصل ہوتی ہیں جب کہ ایک سیارہ اپنے مدار میں حرکت کرتا ہے یا ایک ستارہ فضاء میں حرکت کرتا ہے ۔

فرض کرو کہ ہم مرکزِ ثقل کو مبداء اور تشاکل کے محور کو محور ا لیتے ہیں ۔ فرض کرو کہ جمود کے معیار ا، ب، ب ہیں ۔ تب حرکت کی مساواتیں ہیں :

$$\text{ا}\,\frac{\text{فرسہ}_{1}}{\text{فرت}} = 0, \qquad (134)$$

$$\text{ب}\,\frac{\text{فرسہ}_{2}}{\text{فرت}} = (\text{ب} - \text{ا})\,\text{سہ}_{3}\,\text{سہ}_{1}, \qquad (135)$$

$$\text{ب}\,\frac{\text{فرسہ}_{3}}{\text{فرت}} = -(\text{ب} - \text{ا})\,\text{سہ}_{1}\,\text{سہ}_{2}, \qquad (136)$$

پہلی مساوات سے سہ_{1} کا مستقل ہونا فوراً معلوم ہو جاتا ہے ۔ فرض کرو کہ وہ طا کے مساوی ہے ۔ اب اگر ہم لکھیں

$$\text{گ} = \frac{\text{ب} - \text{ا}}{\text{ب}}\,\text{طا}$$

تو مساواتیں (۱۳۵) اور (۱۳۶) ہو جاتی ہیں

$$\frac{\text{فر سہ}_{۲}}{\text{فر ت}} = \text{گ سہ}_{۳} ، \qquad (۱۳۷)$$

$$\frac{\text{فر سہ}_{۳}}{\text{فر ت}} = - \text{گ سہ}_{۲} ، \qquad (۱۳۸)$$

اس طرح

$$\frac{\text{فر}^{۲}\,\text{سہ}_{۲}}{\text{فر ت}^{۲}} = \text{گ} \frac{\text{فر سہ}_{۳}}{\text{فر ت}} = - \text{گ}^{۲}\,\text{سہ}_{۲}$$

اور اس کا حل ہے

$$\text{سہ}_{۲} = \text{ع جم (گ ت + صہ)}$$

اور مساوات (۱۳۷) سے اب حاصل ہوتا ہے

$$\text{سہ}_{۳} = - \text{ع جب (گ ت + صہ)}$$

اِس لیے لمحہ ت پر زاویئی رفتار کے اجزائے ترکیبی

$$\text{ط، ع جم (گ ت + صہ)، - ع جب (گ ت + صہ)} \qquad (۱۳۹)$$

ہیں اور ہم دیکھتے ہیں کہ گردش کا محور ایک مخروط مرتسم کرتا ہے اور اس کا دور

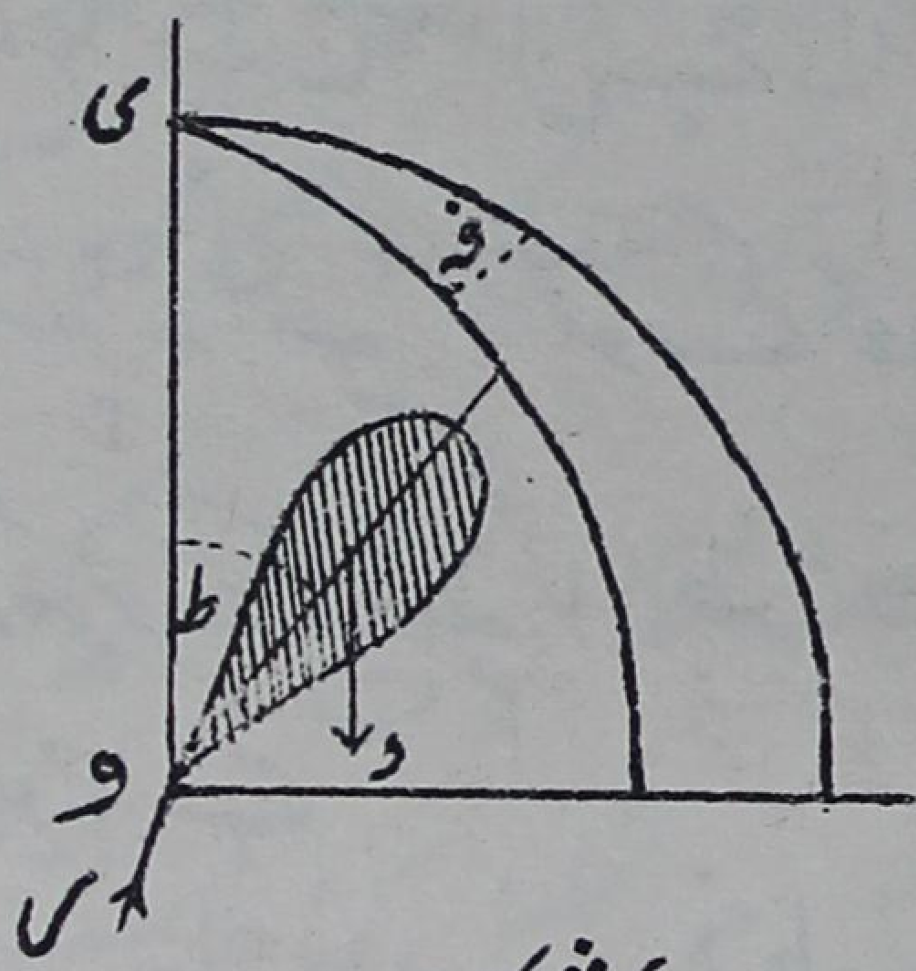
$$\frac{۲\pi}{\text{گ}} \quad \text{یا} \quad \frac{۲\pi}{\text{ط}} \cdot \frac{\text{ب}}{\text{ب - ا}} \quad \text{ہے۔}$$

اگر ب ، ا سے بہت قریب ہو تو دور بہت بڑا ہو سکتا ہے اور اِس لیے حرکت بہت سُست ہو گی۔ یہ زمین کی صورت میں واقع ہوتا ہے، گردش کے محور کی حرکت وہ مظہر پیدا کرتی ہے جس کو عرض بلد کا تغیر کہتے ہیں اور اس کا دور تقریباً ۴۲۸ یوم ہے۔ چونکہ دور $\frac{۲\pi}{\text{ط}}$ تقریباً ایک یوم کو تعبیر کرتا ہے اِس لیے ہم اِس نتیجہ پر پہنچتے ہیں کہ زمین کے لیے $\frac{\text{ب - ا}}{\text{ب}}$ کا رتبہ $\frac{۱}{۴۲۸}$ ہے۔

اِس مقدار کی صحیح قیمت ۰.۳۲۸، ہے، یہ تناقص زمین کی نامکمل اُستواریت کا نتیجہ ہے۔

لٹو کی حرکت

۲۵۴ — اِس باب کے طریقوں کی دوسری مثال کے طور پر فرض کرو کہ ہم ایک گھومتے ہوئے لٹو کی حرکت پر غور کرتے ہیں۔ ہم فرض کریں گے کہ لٹو ایک گردشی جسم ہے جو ایک کیل پر گھوم رہا ہے جس کی نوک ایک نقطہ ہے اور کیل اور اُس سطح کے درمیان تماس جس پر وہ ٹکا ہوا ہے پھسلن کو روکنے کے لیے کافی کھُردرا ہے۔ پس نقطہ تماس ایک ثابت نقطہ و ہے۔ فرض کرو کہ ہم فضاء میں ثابت محور ولا، وما، وی لیتے ہیں جن میں محوری انتصابی ہے اور نیز فرض کرو کہ جسم میں ثابت محور ۱، ۲، ۳ ہیں جو و میں سے



شکل (۱۵۰)

گذرنے والے جمود کے صدر محوروں پر منطبق ہوتے ہیں۔ فرض کرو کہ محور ۱، لٹو کا تشاکل کا محور ہے اور فرض کرو کہ محوروں ۱، ۲، ۳ کے گرد جمود کے معیار أ، ب، ب ہیں۔

یولر کی مساواتوں میں سے پہلی مساوات ہو جاتی ہے

$$أ \frac{فرس_۱}{فرت} = ۰$$

کیونکہ ب = ج اور ل = ۰۔ اِس طرح س۱ مستقل ہے، فرض کرو کہ وہ طا کے مساوی ہے۔

فرض کرو کہ لٹو کا محور اُس اکائی کرہ کو جو و کے گرد کھینچا گیا ہے ایک

نقطہ پر قطع کرتا ہے جس کے قطبی محدد ا، طہ، فہ ہیں جہاں طہ وہ زاویہ ہے جو انتصابی اور لٹو کے محور کے درمیان ہے۔

(۳۱۱) لٹو کی توانائی بالحرکت بموجب دفعہ (۲۴۸)

½ [ا طا^۲ + ب (سہ_۲^۲ + سہ_۳^۲)]

ہے اور توانائی بالقوہ ک ج ھ جم طہ ہے جہاں ھ وہ فاصلہ ہے جو لٹو کے مرکزِ ثقل اور و کے درمیان ہے۔ اِس طرح توانائی کی مساوات ہے

ا طا^۲ + ب (سہ_۲^۲ + سہ_۳^۲) + ۲ ک ج ھ جم طہ = ع (۱۳۹)

جہاں ع ایک مستقل ہے۔ اِس کو ایک مختلف شکل میں رکھا جا سکتا ہے۔ کیونکہ سہ_۲^۲ + سہ_۳^۲، لٹو کے محور کی زاویائی رفتار کا مربع ہے اور اِس لیے اکائی کرہ پر کے نقطہ ا، طہ، فہ کی حقیقی رفتار کا مربع ہے اور اِس لیے حاصل ہوتا ہے

سہ_۲^۲ + سہ_۳^۲ = (فرطہ / فرت)^۲ + جب^۲ طہ (فرفہ / فرت)^۲

توانائی کی مساوات اب شکل

ا طا^۲ + ب [(فرطہ / فرت)^۲ + جب^۲ طہ (فرفہ / فرت)^۲]
+ ۲ ک ج ھ جم طہ = ع (۱۴۰)

اختیار کرتی ہے۔

ہم ایک تیسری مساوات اِس واقعہ سے حاصل کر سکتے ہیں کہ انتصابی محور و ی کے گرد زاویائی معیارِ حرکت مستقل ہے۔ اِس زاویائی معیارِ حرکت کو

(ا) معیارِ حرکت جو محور ا کے گرد گردش طا کی وجہ سے ہے، اور

(ب) معیارِ حرکت جو لٹو کے محور کی حرکت کی وجہ سے ہے

کا مرکب خیال کیا جا سکتا ہے۔
محور ا کے گرد گردش طا کو پھر گردشوں طا جب طہ، طا جم طہ میں تحلیل کیا جا سکتا ہے جو علی الترتیب افقی اور انتصابی کے گرد ہیں، ان گردشوں سے معیار حرکتوں کے معیار، افقی اور انتصابی کے گرد ا طا جب طہ، ا طا جم طہ حاصل ہوتے ہیں۔ اس لیے معیار حرکت کا معیار جو حصہ (ا) سے شامل ہوتا ہے ا طا جم طہ ہے۔

لٹو کے محور کی حرکت کو دو گردشوں میں تحلیل کیا جا سکتا ہے:

(۱) زاوئی رفتار جب طہ $\frac{\text{فرفہ}}{\text{فرت}}$ کی گردش جو اُس محور کے گرد ہے جو انتصابی کے ساتھ زاویہ $\frac{\text{ٹ}}{۲}$ ۔ طہ بناتا ہے،

(۲) زاوئی رفتار $\frac{\text{فرطہ}}{\text{فرت}}$ کی گردش جو ایک افقی محور کے گرد ہے۔ (۳۱۲)

اول الذکر (۱) کو انتصابی کے گرد گردش جب^{۲} طہ $\frac{\text{فرفہ}}{\text{فرت}}$ اور ایک افقی محور کے گرد گردش جب طہ جم طہ $\frac{\text{فرفہ}}{\text{فرت}}$ میں تحلیل کیا جا سکتا ہے۔
اس لیے حرکت کے حصہ (ب) سے انتصابی کے گرد جو معیار حرکت کا معیار شامل ہوتا ہے وہ

$$\text{ب جب}^{۲}\text{ طہ } \frac{\text{فرفہ}}{\text{فرت}}$$

ہے اور چونکہ انتصابی کے گرد معیار حرکت کا معیار ایک مستقل قیمت رکھتا ہے اس لیے فرض کرو کہ یہ مستقل گ ہے تو

$$\text{ا طا جم طہ + ب جب}^{۲}\text{ طہ } \frac{\text{فرفہ}}{\text{فرت}} = \text{گ} \qquad (۱۴۱)$$

اگر ہم $\frac{\text{فرفہ}}{\text{فرت}}$ کو اس مساوات اور مساوات (۱۴۰) سے ساقط

کریں تو حاصل ہوتا ہے

ب جب^۲ طہ [ا طا^۲ + ب (فرطہ/فرت)^۲ + ۲ ک ج ھ جم طہ − ع]
+ (گ − ا طا جم طہ)^۲ = ۰ (۱۴۲)

اِس مساوات سے طہ کی قیمت کے تغیرات حاصل ہوتے ہیں اور اِس لیے انتصابی کے ساتھ لٹو کے محور کے میلان میں جو تبدیلیاں ہوتی ہیں اِن کو ہم معلوم کر سکتے ہیں۔

طہ کی اعظم اور اقل قیمتیں، فرطہ/فرت = ۰ رکھنے سے حاصل ہوتی ہیں اور اس لیے یہ قیمتیں مساوات

ب (ا − جم^۲ طہ) [ا طا^۲ + ۲ ک ج ھ جم طہ − ع]
+ (گ − ا طا جم طہ)^۲ = ۰ (۱۴۳)

کی اصلیں ہیں۔

فرض کرو کہ اِس مساوات کی دائیں جانب کو ہم ف (جم طہ) سے تعبیر کرتے ہیں۔ اب چونکہ ف، تیسرے درجہ کا ایک تفاعل ہے اسلیے جم طہ کی تین اصلیں ہوں گی۔ فرض کرو کہ لٹو کو زاویہ طہ = طہ. پر چلایا گیا ہے اور فرطہ/فرت کی قیمت (فرطہ/فرت). کے مساوی ہے۔ تب مساوات (۱۴۲) سے

ب جب^۲ طہ. [ا طا^۲ + ب (فرطہ/فرت)^۲. + ۲ ک ج ھ جم طہ. − ع]
+ (گ − ا طا جم طہ.)^۲ = ۰

اور اس لیے ف (جم طہ.) = ب جب^۲ طہ. [ا طا^۲ + ۲ ک ج ھ جم طہ. − ع]

$$+ (\text{گ} - \text{ا} \text{طا جم طہ})^2 = - \text{ب}^2 \text{جب}^2 \text{طہ} \left(\frac{\text{فرطہ}}{\text{فرت}}\right)^2$$

اِس لیے ف (جم طہ) منفی ہے۔ ہم آسانی سے مساوات (۱۴۳) (۳۱۳) سے معلوم کرتے ہیں کہ

$$\text{ف} (1) = (\text{گ} - \text{ا} \text{طا})^2$$

اِس لیے ف (۱) مثبت ہے۔

$$\text{نیز} \quad \text{ف} (-1) = (\text{گ} + \text{ا} \text{طا})^2$$

اِس لیے ف (-۱) مثبت ہے اور

$$\text{ف} (+\infty) = -2 \text{ک ن} \infty \text{ب} (+\infty)^3$$

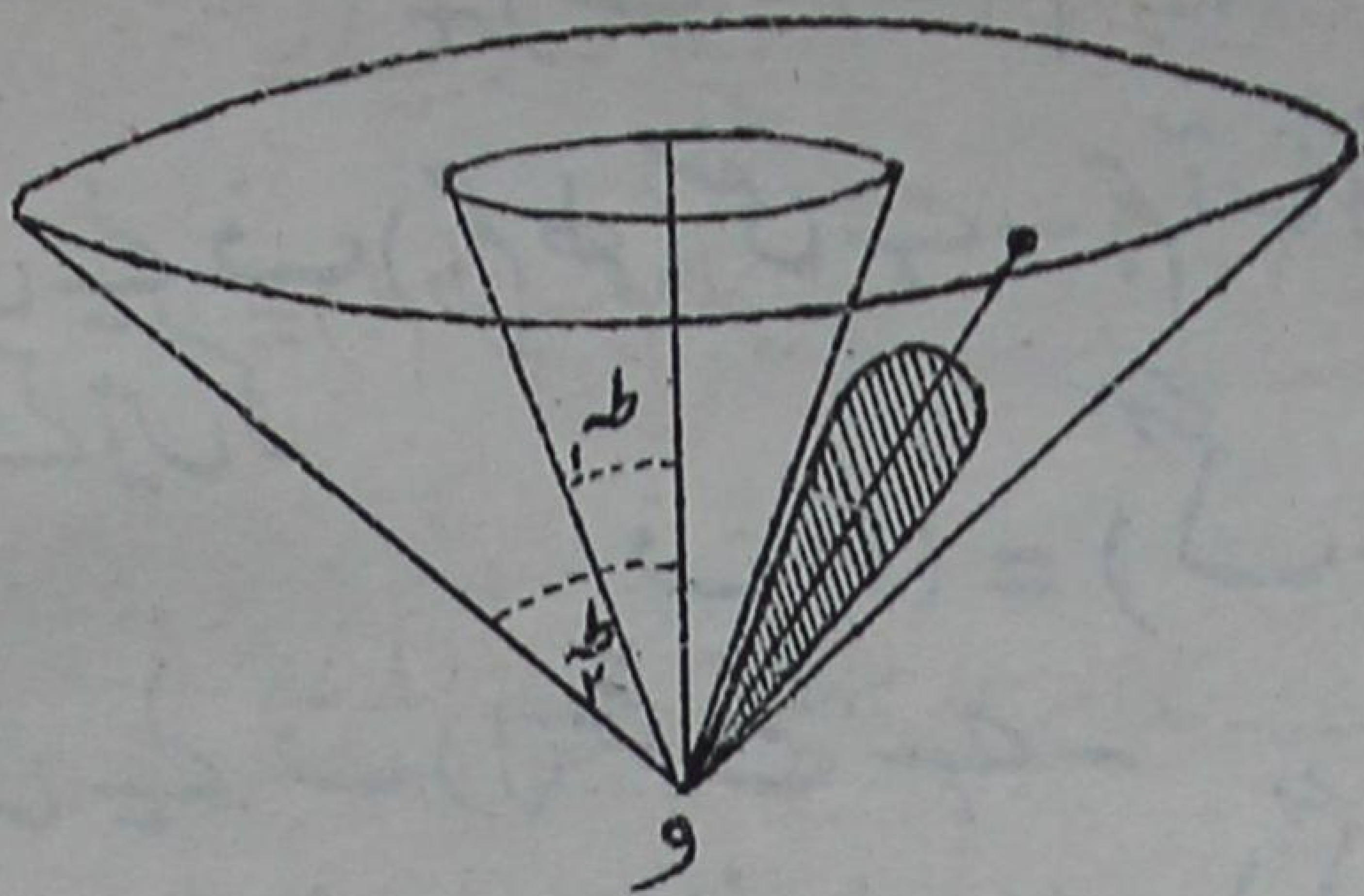
جو منفی ہے۔ اِس طرح ہم دیکھ چکے ہیں کہ

جب، جم طہ = +∞ تو ف (جم طہ) منفی ہے،
جب، جم طہ = ۱ تو ف (جم طہ) مثبت ہے،
جب، جم طہ = جم طہ. تو ف (جم طہ) منفی ہے،
جب، جم طہ = -۱ تو ف (جم طہ) مثبت ہے۔

اِس لیے کعبی ف (جم طہ) = ۰ کی تین اصلیں حسب ذیل طریقہ پر واقع ہوتی ہیں:

ایک اصل طہ = طہ۱ جو جم طہ = ۱ اور جم طہ = جم طہ. کے درمیان ہے
ایک اصل طہ = طہ۲ جو جم طہ = جم طہ. اور جم طہ = -۱ کے درمیان ہے
ایک اصل وہ ہے جس کے لیے جم طہ عدداً اکائی سے بڑا ہے اور اِس لیے طہ کی کوئی حقیقی قیمت حاصل نہیں ہوتی۔

اِس لیے ہم دیکھتے ہیں کہ وہ نقطے جن پر $\frac{\text{فرطہ}}{\text{فرت}}$ معدوم ہو سکتا ہے صرف طہ = طہ۱، اور طہ = طہ۲ ہیں۔ اِن نقطوں پر $\frac{\text{فرطہ}}{\text{فرت}}$ معدوم ہوتا ہے اور چونکہ اِن میں سے کسی نقطہ پر مساوی اصلیں نہیں ہیں اِس لیے



شکل (۱۵۱)

$\frac{ف ر ط}{ف ر ت}$ اِن نقطوں پر پہنچ کر علامت تبدیل کرتا ہے اور اِس لیے ط، صرف قیمتوں ط۱ اور ط۲ کے درمیان تبدیل ہو سکتا ہے۔
پس لٹو کا محور دو مخروطوں ط = ط۱ اور ط = ط۲ کے درمیان اہتزاز کرتا ہے۔

۲۵۵ — فرض کرو کہ ہم وہ کم سے کم زاوی معیار حرکت معلوم کرنا چاہتے ہیں جو لٹو کا ہونا چاہیے تاکہ وہ بغیر گر پڑنے کے گھومتا رہے۔ اس کے لیے ہم مان سکتے ہیں کہ لٹو گرے گا اگر کبھی ط، ایک خاص حد ط۳ سے تجاوز کرے خواہ اِس کا گرنا کیل کے پھسلنے سے یا اس کا پہلو زمین کو مس کرنے سے وقوع پذیر ہوا ہو۔ وہ شرط کہ لٹو گر نہ پڑے یہ ہے کہ ط۲ کو ط۳ سے کم ہونا چاہیے اور اِس لیے ف (جم ط۳) کو مثبت ہونا چاہیے۔ اِسلیے ع، گ، اور طا کی قیمتیں ایسی ہونی چاہئیں کہ (۳۱۴)

ب جب^۲ ط۳ (اطا^۲ + ۲ ک ج ھ جم ط۳ − ع) + (گ − اطا جم ط۳)^۲

مثبت ہو۔

فرض کرو کہ لٹو کو انتصابی کے ساتھ میلان ط۰ پر ابتداً گھمایا گیا ہے اور لٹو اپنے محور کے گرد گردش طا کے سوا کوئی اور حرکت نہیں رکھتا۔ اب مساواتوں (۱۴۰) اور (۱۴۱) سے

ع = اطا^۲ + ۲ ک ج ھ جم ط۰،
گ = اطا جم ط۰۔

اِس طرح

ف (جم ط۳) = ب جب^۲ ط۳ (اطا^۲ + ۲ ک ج ھ جم ط۳ − ع)

+ (گ - ا طا جم طہ۳)۲

= ب جب۲ طہ۲ × ۲ ک ج ھ (جم طہ۲ - جم طہ.) + ا۲ طا۲ (جم طہ۲ - جم طہ.)۲

= (جم طہ۲ - جم طہ.) [۲ ک ج ھ ب جب۲ طہ۲ + ا۲ طا۲ (جم طہ۲ - جم طہ.)] .... (۱۴۴)

چونکہ لٹو کو ایک ایسے محل میں ضرور چلایا گیا ہے جس میں وہ گھوم سکتا ہے اس لیے جم طہ۲ - جم طہ. کی قیمت ضرور منفی ہے - اس لیے ف (جم طہ۲) کے مثبت ہونے کے لیے

ا۲ طا۲ (جم طہ. - جم طہ۲) - ۲ ک ج ھ ب جب۲ طہ۲ (۱۴۵)

کو مثبت ہونا چاہیئے یا

طا۲ > ۲ ک ج ھ ب جب۲ طہ۳ / ا۲ (جم طہ. - جم طہ۳) (۱۴۶)

ہم دیکھتے ہیں کہ اگر ا بہت چھوٹا ہے تو طا کی وہ قیمت جو لٹو کو گرنے سے بچانے کیلئے مطلوب ہے بہت بڑی ہے - اس لیے چھوٹی عمودی تراش کے لٹو کو گھمانا بہت مشکل ہے مثلاً سیسے کی پنسل یا نوکدار تار کو -

اگر ہم اس زاویہ کا انتخاب کر سکیں جس پر لٹو گھومنا شروع کرتا ہے تو گویا جم طہ. اختیاری ہے - ہم دیکھتے ہیں کہ طا کی مطلوبہ قیمت کم سے کم ہو گی جبکہ جم طہ. اعظم ہو یعنے جبکہ لٹو کو انتصاباً گھمایا گیا ہو - اس صورت میں لٹو گھومیگا اگر (۳۱۵)

طا۲ > ۲ ک ج ھ ب جب۲ طہ۳ / ا۲ (۱ - جم طہ۳)

یا اگر طا۲ > ۲ ک ج ھ ب (۱ + جم طہ۳) / ا۲

۲۵۶ — بالعموم اگر لٹو انتصاباً گھومنے کی ابتدا کرے اور اس کے محور کے گرد خالص گردش کے سوا کوئی اور رفتار نہ ہو تو مساوات (۱۴۴) میں جم طہ. = ۱ رکھنے پر حاصل ہوتا ہے

ف (جم طہ) = (۱ - جم طہ)^2 [ا^2 طا^2 - ۲ ک ج ھ ب (۱ + جم طہ)]

مساوات ف (جم طہ) = ۰ کی اصلیں ہیں

جم طہ = + ۱، + ۱، $\frac{\text{ا}^2\ \text{طا}^2}{\text{۲ ک ج ھ ب}}$ - ۱

فرض کرو کہ ہم لکھتے ہیں

طا.^{2} = $\frac{\text{۴ ک ج ھ ب}}{\text{ا}^2}$

تو جب، طا^2 = طا.^{2} تو اصلیں حاصل ہوتی ہیں

جم طہ = + ۱، + ۱، + ۱

اور جب، طا^2 > طا.^{2} تو تیسری اصل اکائی سے بڑی ہے اور جب، طا^2 < طا.^{2} تو تیسری اصل اکائی سے کم ہے، فرض کرو جم طہ = جم ظہ جہاں ظہ ایک حقیقی زاویہ ہے جو مساوات

جم ظہ = $\frac{\text{ا}^2\ \text{طا}^2}{\text{۲ ک ج ھ ب}}$ - ۱ = ۱ - $\frac{\text{۲ (طا.}^2\text{ - طا}^2\text{)}}{\text{طا.}^2}$ (۱۴۷)

سے حاصل ہوتا ہے۔

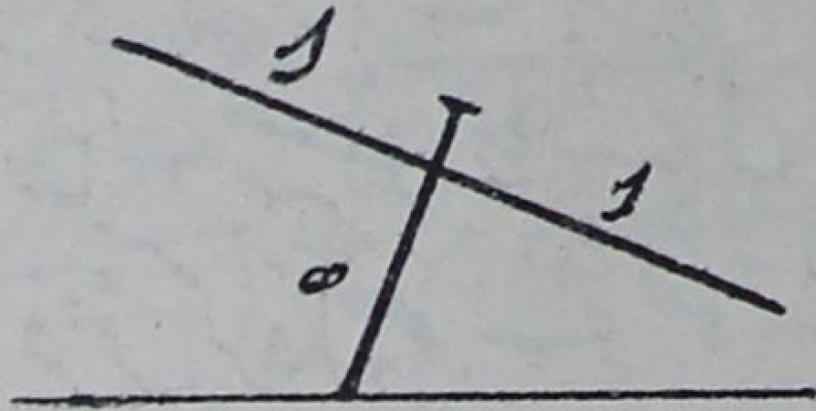
پس جب تک طا^2 > طا.^{2} اہتزازات منطبق حدود طہ = ۰ اور طہ = ۰ کے درمیان مقید رہتے ہیں اور اس لیے لٹو انتصابی رہتا ہے لیکن جوں ہی طا^2 < طا.^{2} اہتزازات حدود طہ = ۰ اور طہ = ظہ کے درمیان ہونے لگتے ہیں

فرض کرو کہ ہم لٹو کو زاویی رفتار طا سے جو طا. سے بڑی ہے چلاتے ہیں، اس لیے پہلے پہل اس کا محور انتصابی ہے اور لٹو کی حرکت صرف اس کے محور کے گرد گردش کی حرکت ہے۔ اب طہ کی حقیقی اصلیں ۰، ہیں

اور اس لیے اہتزازات کی کوئی سعت نہیں ہے اور لٹّو کا محور ٹھیک انتصابی رہتا ہے (۳۱۶)
اس کو انگریزی عام زبان میں کہتے ہیں کہ لٹّو "Asleep" ہے اور اردو میں اسکو لٹّو کی نیند کہا جاتا ہے
اگر مفروضہ شرطیں بدرجہ اتم پوری ہوتیں تو یہ حرکت دائم جاری رہتی
لیکن فطرت میں ایسی کامل شرطیں موجود نہیں ہو سکتیں۔ کیل اور اس سطح کے درمیان جب یہ لٹّو گھومتا ہے تماس کا علاقہ ٹھیک ایک نقطہ نہیں ہوتا بلکہ ایک چھوٹا دائرہ یا قطع ناقص ہوتا ہے اور اس کی وجہ یہ ہے کہ نقطہ تماس پر تھوڑا سا پچکاؤ وقوع پذیر ہوتا ہے۔ کیل کو سخت فولاد کا بنانے اور لٹّو کو ایک سخت سطح پر گھمانے سے یہ علاقہ چھوٹا بنایا جا سکتا ہے لیکن وہ پھر بھی محدود ابعاد کا ہوگا۔ اس کا نتیجہ یہ ہے کہ کیلے پر کے تعاملات سب کے سب محور سے نہیں ملتے۔ لٹّو کی گردش میں مزاحمت پیدا کرنے والا ایک فرکی چھوٹا جفت ہوتا ہے اور ط ابتدریج گھٹتا ہے۔

جب ط اتنا گھٹ جاتا ہے کہ وہ ط. سے کم ہوتا ہے تو اہتزاز کی سعتیں ط = . اور ط = ظ ہوتی ہیں۔ لٹّو اب نیند میں نہیں ہوتا بلکہ زاویہ ظ میں سے لڑکھڑانے لگتا ہے۔ جیسے ط ا گھٹنا جاری رکھتا ہے ظ مسلسل بڑھتا ہے جو مساوات (۱۴۷) سے ظاہر ہے اور بالآخر ظ اتنی بڑی قیمت تک پہنچ جاتا ہے کہ لٹّو زمین پر لڑھکنے لگتا ہے اور اسلیے گر پڑتا ہے۔

۲۵۷ — ایک بہت ہی سادہ قسم کے لٹّو کی صورت میں یہ نتیجے جو شکل اختیار کرتے ہیں اُن کا امتحان کرنا دلچسپی کا موجب ہوگا۔ فرض کرو کہ کمیت ک اور نصف قطر ا کی ایک ایکساں قرص ہے اور اس کے مرکز میں سے ایک پن گذار کر لٹّو بنایا گیا ہے۔ فرض کرو کہ پن کا وہ طول جو قرص میں سے اس کی نچلی جانب نکلا ہوا ہے ھ ہے اور فرض کرو کہ قرص کی کمیت کے



شکل (۱۵۲)

مقابلہ میں اپن کی کمیت قابل نظر انداز ہے۔ ہ وہی ہے جو دفعات ماسبق کے مسائل تحلیلی میں فرض کیا گیا تھا۔ ا اور ب کی قیمتیں ہیں

$$ا = \frac{1}{2}ک\,ا'^{2}\ ،\ ب = \frac{1}{2}ک\,ا^{2}$$

اِس لیے $$طا^{2} = \frac{4\,ک\,ج\,ہ\,ب}{ا'^{2}} = \frac{4\,ج\,ہ}{ا^{2}}$$

جب لٹو فاصل رفتار طا پر جس پر لڑکھڑانے کی ابتدا ہوتی ہے گھومنے لگتا ہے تو کور پر کے کسی نقطہ کی رفتار طا ا ہے یعنے $2\sqrt{ج ہ}$ ۔ اس طرح لڑکھڑانا شروع ہوتا ہے جبکہ کور پر کے کسی نقطہ کی رفتار $2\sqrt{ج ہ}$ میں گھٹ جاتی ہے، یہ رفتار ایسی ہے جو صرف قرص کے ارتفاع پر منحصر ہے اور اِس کے نصف قطر پر منحصر نہیں ہے۔ چنانچہ ہم دیکھتے ہیں کہ قرص جتنا نیچے ہوگا اتنا سُست وہ بغیر لڑکھڑائے گھومے گا۔ اگر ہم ہ = ۲″ لیں تو معلوم ہوگا کہ لڑکھڑانا شروع ہوتا ہے جبکہ کور کی رفتار تقریباً ۷ ، ۴ فٹ فی ثانیہ ہے۔

(۳۱۷) کور زمین کو مس کرے گی جبکہ لڑکھڑانے کی سعت مس ظہ = $\frac{ہ}{ا}$ سے حاصل ہو اور اِس کے بعد لٹو زمین پر لڑھکے گا۔ اگر ہم حسب سابق ا = ۶″ اور ہ = ۲″ لیں تو مس ظہ = $\frac{1}{3}$ اور اِس لیے جم ظہ = $\frac{3}{\sqrt{10}}$ اور $\frac{طا_{.}^{2} - طا^{2}}{طا_{.}^{2}}$ = ۱۰۶ ، تقریباً۔ اس طرح طا = $\frac{19}{20}$ طا. تقریباً۔ پس ایسا لٹو نیند میں رہے گا تا آنکہ اِس کی کور کی رفتار ۷ ، ۴ فٹ فی ثانیہ تک گھٹ جائے۔ اِس کے بعد وہ لڑکھڑائے گا اور جوں ہی اِس کی کور کی رفتار تقریباً ۵ ، ۴ فٹ فی ثانیہ فی ثانیہ تک گھٹ جائے گی وہ زمین پر لڑھکنے لگیگا۔

معمولی چھوٹے لٹو کے لیے جس کی شکل ناشپاتی جیسی ہوتی ہے ہم ہ = $\frac{1}{2}$ ا تقریبی طور پر لے سکتے ہیں اور نقطہ تماس میں سے گذرنے والے محوروں کے گرد گھماؤ کے نصف قطروں کو $\frac{3}{4}$ ا اور ۲ا لے سکتے ہیں۔ اِس لیے

انچوں میں

ا = ۹/۱۶ ک ، ب = ۴ ک ،

طا^۲ = ۴ ک ج ھ ب / ا^۲ = ۲۰۴۸/۲۷ ج

ج = ۳۸۶″ فی ثانیہ فی ثانیہ لینے سے طا = ۱۷۰ اگردشیں فی ثانیہ ۔ اگر لٹو کو ایک ڈوری سے گھمایا گیا ہو جس کا سرا لٹو کے گرد نصف قطر ایک انچ کے دائروں میں لپیٹا گیا ہے تو ڈوری کو لٹو کے لحاظ سے تقریباً ۶۰ میل فی گھنٹہ کی رفتار سے کھینچنا چاہئے تاکہ مطلوبہ زاوئی رفتار پیدا ہو ۔

عام مثالیں

۱ ۔ ایک اُڑ پہیہ کے جمود کا معیار م ہے ، اس کے محور کے گرد جس کا نصف قطر ب ہے ایک ڈوری لپٹی ہوئی ہے ۔ وزن و کے مساوی تناؤ ایک ثانیہ تک ڈوری پر عائد کیا گیا ہے ۔ ایک ثانیہ کے ختم پر اُڑ پہیہ کی زاوئی رفتار کیا ہوگی ؟

۲ ۔ ایک بحری بیڑہ جس کا مجموعی ہٹاؤ ۲۰۰۰۰۰ ٹن ہے خط اُستواء پر مشرق سے مغرب کی جانب حرکت کرتا ہے اور فی گھنٹہ طول بلد کے ۲۰ دقیقے طے کرتا ہے ۔ زمین کو کمیت ۶ × ۱۰^۲۱ ٹن کا ایک متجانس کُرہ سمجھ کر زمین کی زاوئی رفتار میں تبدیلی معلوم کرو جو بیڑے کی حرکت سے پیدا ہوتی ہے ۔ ثابت کرو کہ دن کے طول میں تقریباً ۱۶ × ۱۰^-۱۴ ثانیے کا اضافہ ہوتا ہے ۔

۳ ۔ زمین کی کمیت ۶ × ۱۰^۲۱ ٹن ہے اور برف ٹیلے اور پگھلا ہوا برف وزنی ۱۰ ٹن قطب شمالی سے عرض بلد ۴۵° کی جانب حرکت کرتے ہیں ۔ دن کے طول میں تبدیلی معلوم کرو ۔

۴ ۔ کمیت گ کی ایک ٹرین شمالاً ۶۰ میل فی گھنٹہ سے دوڑتی ہے ۔ ثابت کرو کہ مشرقی پٹڑی اور پہیہ کی کوروں کے درمیان زمین کی گردش کی وجہ سے

ایک دباؤ ہونا چاہئے، اِس دباؤ کی مقدار معلوم کرو۔

۵۔ زمین پر شہابوں کے گرنے سے جو تمام سمتوں سے زمین پر پہنچتے ہیں غبار کی ایک پتلی تہ جمتی ہے جس کی موٹائی ہ فٹ ہے۔ ثابت کرو کہ دن کے طول میں تبدیلی تقریباً $\frac{۵ ہ غہ}{ا د}$ فی یوم ہو گی جہاں زمین کا نصف قطر فٹوں میں ا ہے اور زمین اور شہابی غبار کی کثافتیں علی الترتیب د اور غہ ہیں۔

۶۔ دو کمیتیں ک اور کَ جو چرخ اور محور سے لٹکائی گئی ہیں متوازن نہیں ہیں، چرخ اور محور کے نصف قطر علی الترتیب ا اور ب ہیں۔ ثابت کرو کہ ک کا اسراع

$$\frac{ک ا - کَ ب}{ک ا^۲ + کَ ب^۲ + م} ا ج$$

ہے جہاں م، مشین کے جمود کا معیار اِس کے محور کے گرد ہے۔

۷۔ ایک ہلکی، کامل ملائم، نا امتداد پذیر ڈوری ایک ایکساں اسطوانے کی مرکزی تراش کے گرد لپٹی ہوئی ہے۔ ڈوری کا ایک سرا ایک ثابت نقطہ سے بندھا ہے اور اسطوانے کو گرنے چھوڑ دیا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ وہ اسراع $\frac{۲}{۳}$ ج کے ساتھ گرے گا۔

۸۔ طول ۲ ا کے دو مساوی ایکساں ڈنڈے ایک سرے پر ڈھیلے جوڑے گئے ہیں اور اِن کو نصف قطر $\frac{ا\sqrt{۲}}{۳}$ کے ایک ثابت کرہ پر متشاکلاً رکھکر ایک افقی محل میں اِس طرح اُٹھایا گیا ہے کہ قبضہ کرہ کو مس کرتا ہے۔ تب اِن کو اترنے چھوڑ دیا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ جب وہ اولاً ساکن ہوتے ہیں تو وہ افق سے زاویہ جم‌ا $\frac{۱}{۳}$ پر مائل ہوتے ہیں اور یہ کہ ہر نقطہ تماس پر کرہ پر دباؤ ایک ڈنڈے کے وزن کا ایک ربع ہے اور نیز یہ کہ قبضہ پر کوئی فساد نہیں ہے۔

۹۔ ایک ڈنڈے کا ایک سرا ایک چکنے افقی مستوی پر ٹکا ہوا ہے اور دوسرا سرا ایک چکنی انتصابی دیوار پر، ڈنڈا افق سے زاویہ ع پر مائل ہے۔

اگر اس کو پھسلنے چھوڑ دیا گیا تو ثابت کرو کہ وہ دیوار سے جدا ہوگا جبکہ افق کے ساتھ اس کا میلان $\text{جب}^{-1}\left(\frac{2}{3}\ \text{جب عہ}\right)$ ہو جائے۔

۱۰۔ اگر سورج بتدریج اس طریقہ پر سکڑے کہ ترکیب اور شکل میں ہمیشہ اپنے مشابہ رہے تو ثابت کرو کہ جب ہر نصف قطر اپنے طول کا ن واں حصہ سکڑ چکے جہاں ن بڑا ہے تو زاوی رفتار اپنی پہلی قیمت سے $\left(1 + \frac{2}{\text{ن}}\right)$ گنا بڑھ جائے گی۔ گردش کی توانائی بالحرکت میں تبدیلی معلوم کرو۔

۱۱۔ ایک لچکدار پٹے کا طبعی طول $2\pi\,\text{ا}$، کمیت ک، اور مقیاس لہ ہے۔ یہ پٹہ، افقی مستوی میں نصف قطر ا کے ایک کھردرے پہیہ پر ساکن ہے۔ پٹہ کو پہیہ کے محیط کے مقابل پکڑ کر پہیہ کو زاوی رفتار طا کے ساتھ گھمایا گیا۔ اگر پٹہ کو چھوڑ دیا جائے تو ثابت کرو کہ وہ وسیع ہوگا اور جب اس کا نیم قطر ر ہوگا تو اس کی زاوی رفتار $\frac{\text{ا}^2\,\text{طا}}{\text{ر}^2}$ ہوگی اور اس کی نیم قطری رفتار

$$\left[\frac{\text{ا}^2\,\text{طا}^2}{\text{ر}^2}\left(\text{ر}^2 - \text{ا}^2\right) - \frac{2\pi\,\text{لہ}\,(\text{ر} - \text{ا})^2}{\text{ک}\,\text{ا}}\right]^{\frac{1}{2}}$$

ہوگی۔

(۳۱۹) ۱۲۔ ایک یکساں مثلثی قرص ا ب ج کو اس طرح سہارا گیا ہے کہ وہ اپنے مستوی میں ا کے گرد اہتزاز کرسکتا ہے، اس کا مستوی انتصابی ہے۔ ثابت کرو کہ اس کے مماثل سادہ رقاص کا طول

$$\frac{1}{4}\,\frac{3\left(\text{ب}^2 + \text{ج}^2\right) - \text{ا}^2}{\sqrt{2\left(\text{ب}^2 + \text{ج}^2\right) - \text{ا}^2}}$$

ہے۔

۱۳۔ کمیت ک کے شیشے کے ایک مکعب میں نصف قطر ا کا ایک کروی جوف بنایا گیا ہے اور اس جوف کے اندر کمیت ک کا ایک ذرہ رکھا گیا ہے۔ پھر مکعب کو ایک چکنے افقی مستوی پر رفتار و کے ساتھ پھینکا گیا ہے۔

اگر ذرہ کرہ کے گرد ٹھیک ایک چکر لگائے اور اثنائے حرکت میں کرہ کو مس کرتا رہے تو ثابت کرو کہ

$$و^{2} = ۵ ا ج + ۴ ا ج \frac{ک}{گ}$$

۱۴ــ ناقابل قدر کمیت کے ایک ڈنڈے کے سِروں اور وسطی نقطہ پر تین مساوی ذرے لگائے گئے ہیں اور ایک سِرے پر کے ذرہ پر ڈنڈے کے علی القوائم ایک ضرب لگائی گئی ہے۔ ثابت کرو کہ ذروں کی ابتدائی رفتاریں نسبت

$$۱ : ۲ : ۵$$

میں ہوں گی۔

۱۵ــ کمیت ک اور نصف قطر ا کا ایک کھُردرا افقی اسطوانہ اپنے محور کے گرد گردش کرنے میں آزاد ہے۔ اِس کے گرد ایک ڈوری لپیٹی گئی ہے جس کے آزاد سِرے پر کمیت ک اور طول ل کی ایک زنجیر لگی ہوئی ہے۔ زنجیر کو ایکجا اکٹھا کر کے چھوڑ دیا گیا ہے۔ اگر ط وہ زاویہ ہو جس میں سے اسطوانہ زنجیر کے پوری طرح تن جانے سے وقت ت پیشتر گھوم چکا ہے تو ثابت کرو کہ

$$ک ا ط = \frac{ک}{ل} \left(\frac{۱}{۲} ج ت^{۲} - ا ط \right)^{۲}$$

۱۶ــ ایک ایکساں چپٹی دائری تھالی کو ایک کھُردرے افقی مُستوی پر پھینکا گیا ہے، اور کسی عنصر پر جو رفتار و سے حرکت کر رہا ہو رگڑ م $و^{۲}$ × (عنصر کی کمیت) ہے جس کی سمت و کی سمت کے خلاف ہے۔ تھالی کے مرکز کا راستہ معلوم کرو۔

(۳۲۰)

بارہواں باب

تعمیم شدہ محدد

۲۵۸ — اب تک ہم نے مادی اجسام کے علم الحیل (حرکیات اور سکونیات) پر اس مفروضہ کے ساتھ بحث کی ہے کہ یہ اجسام لاتعداد چھوٹے ذروں پر مشتمل ہیں جو اُستوار جسم کی صورت میں اپنے اپنے محل پر مضبوطی کے ساتھ جکڑے ہوئے ہیں اور ان کے ذریعہ جسم کے ایک حصہ سے دوسرے حصہ تک قوت کو منتقل کیا جا سکتا ہے۔

۲۵۹ — اُستوار اجسام کی صورت میں بھی مادہ کی ساخت کے متعلق یہ قیاس بالکل مطابق نتائج پیدا نہ کر سکا۔ مثلاً دو غیر کامل لچکدار اجسام کے درمیان ٹکر کے بعد یا دو غیر کامل چکنے اجسام کے درمیان پھسلن کے بعد یہ معلوم ہوا ہے کہ توانائی کی کچھ مقدار نظروں سے غائب ہو جاتی ہے چنانچہ ہمیں یہ فرض کرنا پڑا تھا کہ یہ توانائی جسم کے انتہائی ذروں کی ایک دوسرے کے لحاظ سے حرکتوں کے پیدا کرنے میں کام آتی ہے۔ دوسرے الفاظ میں ٹکر یا پھسلن واقع ہونے کے بعد اُستوار اجسام کے متعلق یہ فرض نہیں کیا جا سکتا کہ وہ اُن شرطوں کو پورا کرتے ہیں جن کا ادعا کیا گیا ہے۔

اُن جسموں کی صورت میں جو صریحاً اُستوار نہیں ہیں حال اس سے زیادہ ابتر ہے۔ یہاں وہ قیاسات جو ہم نے اُستوار اجسام کے مطالعہ میں قائم کئے تھے کوئی مدد نہیں پہنچاتے اور ان کی بجائے دیگر قیاسات کے

بغیر آگے بڑھنا بہت دشوار ہے۔

۲۶۰ ۔ اِس منزل پر آگے بڑھنے کے دو طریقے ہیں۔ ہم اُن نئے قیاسات کو جو احسن معلوم ہوں اختیار کر سکتے ہیں اور اس طریقہ پر زیر بحث مادہ کی ساخت کی تصویر کھینچ سکتے ہیں۔ لیکن یہ یقینی نہیں کہ اِس طریقہ سے جو نتائج حاصل ہوں گے وہ صحیح ہوں گے کیونکہ کبھی بھی ہمیں اِس کا یقین نہیں ہو سکتا کہ مادہ کی انتہائی ساخت کی نوعیت کے متعلق ہمارے قیاسات صحیح ہیں۔ بریں ہم مادہ کی ساخت کے متعلق اِن شرطی قیاسات کے ادخال سے یہ دیکھنا کہ کیا نتائج حاصل ہوتے ہیں خالی از قدر و قیمت نہیں ہے۔ اگر یہ نتیجے اُن مظاہر کے مطابق ہیں جو فطرت میں زیر مشاہدہ آتے ہیں تو ہمارے شرطی قیاسات کا صداقت سے قریب ہونا درست ہو سکتا ہے۔ لیکن اس کے برخلاف اگر حاصل شدہ نتیجے اِن مظاہر کے مطابق نہ ہوں تو اِن قیاسات میں جن سے یہ نتیجے حاصل ہوتے ہیں یا تو ترمیم کرنی ہوگی یا انہیں ترک کرنا ہوگا۔

مادہ کی ساخت سے متعلق مختلف قیاسات سے ریاضی طبعیات کی مختلف شاخیں برآمد ہوں گی۔ تمثیلاً ریاضی طبعیات کی ایسی شاخوں میں سے "لچکدار ٹھوس اجسام کا نظریہ" اور "گیسوں کا حرکی نظریہ" پیش کئے جا سکتے ہیں۔ قبل الذکر کی بنیاد اُن شرطی قیاسات پر ہے جو اُن ذروں کے سلوک کے متعلق قائم کئے گئے ہیں جن سے ٹھوس اجسام کی ترکیب ہوتی ہے۔ اور بعد الذکر نظریہ کی بنیاد اُن شرطی قیاسات پر ہے جو گیس کے ذروں کے سلوک کے متعلق قائم کئے گئے ہیں۔ مادہ کی ساخت سے متعلق مختلف قیاسات سے جو نتائج برآمد ہوتے ہیں اُن کا تذکرہ اور تفہیم صریحاً اِس کتاب کے حدود سے باہر ہے۔

۲۶۱ ۔ لیکن آگے بڑھنے کا ایک متبادل طریقہ ہے۔ ہم نے نیوٹن کے حرکت کے قوانین کو وہ مواد سمجھا ہے جو تجربی سائنس نے نظری سائنس کے لیے مہیا کیا ہے تاکہ نظری سائنس میں اِس سے کام لیا جا سکے۔ اِن

قوانین کی صداقت جبکہ انہیں مادی کائنات کے انتہائی ذروں پر استعمال کیا جائے کسی طرح یقینی نہیں ہے کیونکہ ہم ان انتہائی ذروں کو حاصل نہیں کر سکتے کہ ان پر تجربہ کیا جائے۔ تاہم فرض کرو کہ ہم اس کا امتحان کرتے ہیں کہ آیا علم الحیل میں صرف اس دعوے کے ساتھ (اور یہ بلاشبہ غیر یقینی ہے) کہ نیوٹن کے قوانین انتہائی ذروں پر اطلاق پذیر ہیں کوئی ترقی ہو سکتی ہے۔ اگر ہم اس سمت میں کوئی ترقی کر سکیں تو حاصل شدہ نتیجے بلاشبہ علم الحیل کی تمام دیگر توسیعات پر اطلاق پذیر ہوں گے خواہ ہم انتہائی ذروں کی نوعیت اور ترتیب کے متعلق کوئی مزید دعوے داخل کریں یا نہ کریں۔

۲۶۲ — وہ مقام جہاں سے ہم مادہ کو دیکھ رہے ہیں شائد ایک تمثیل سے واضح کیا جا سکتا ہے، اس تمثیل کو سب سے پہلے کلرک میاکسویل نے بیان کیا تھا۔ فرض کرو کہ ایک پیچیدہ مشین ایک بند کمرہ میں رکھی ہوئی ہے اور اس مشین اور بیرونی دنیا کے درمیان صرف متعدد رسیوں کے ذریعہ تعلق قائم ہے جو فرش کے سوراخوں میں سے نیچے کے کمرہ میں لٹک رہی ہیں۔ اگر کوئی شخص نیچے کے کمرہ میں داخل ہو تو اسے مشین کے معائنہ کرنے کا کوئی موقع نہیں ہے لیکن وہ مختلف رسیوں کو کھینچ کر مشین کو کچھ حد تک استعمال کر سکتا ہے۔ اگر ایک رسی کھینچنے پر اُس کو معلوم ہو کہ دوسری رسیاں حرکت میں آتی ہیں تو وہ سمجھ سکتا ہے کہ یہ رسیاں اوپر کسی نہ کسی میکانیت کے ذریعہ مربوط ہونی چاہئیں لیکن وہ اس میکانیت کی ٹھیک نوعیت دریافت کرنے سے قاصر رہے گا۔

اس مخفی میکانیت کے متعلق یہ فرض کیا جا سکتا ہے کہ وہ کائنات کی میکانیت کے ان حصوں کو تعبیر کرتی ہے جو ہماری نظر سے پوشیدہ ہیں اور رسیوں سے وہ حصے تعبیر ہوتے ہیں جن کو ہم چلا سکتے ہیں۔ فطرت میں بعض اعمال ہیں جن کو ہم انجام دے سکتے ہیں، یہ گویا ہماری تمثیل میں رسیوں کے کھینچنے کا جواب ہیں اور ہم دیکھتے ہیں کہ ان اعمال سے بعض نتائج پیدا ہوتے ہیں جو دوسری رسیوں کی حرکت کا جواب ہیں۔ لیکن وہ میکانیت

جس کی وجہ سے وہ سبب یہ اثر پیدا کرتا ہے بالکلیہ نامعلوم رہتا ہے۔ مثلاً اگر ہم ایک برقی دور کی چابی کو دبائیں تو یہ معلوم کیا جا سکتا ہے کہ دور رکھے ہوئے ایک برقی روپیما کی سوئی حرکت کرتی ہے لیکن وہ حیلی اعمال جو دور کے تاروں میں سے اور برقی روپیما کو گھیرے ہوئے ایثیر میں سے اس عمل کو منتقل کرتے ہیں نامعلوم رہتے ہیں۔

۲۶۳ — اب فرض کرو کہ وہ شخص جو نیچے کے کمرہ میں داخل ہوا ہے رسیوں کو اپنے حسب مرضی استعمال کرنے میں آزاد ہے اور یہ کہ وہ رسیوں کے درمیان تعلق کو دریافت کرنا چاہتا ہے۔ وہ اس قیاس پر ابتداء کر سکتا ہے کہ اوپر کے کمرہ کی مشین کی میکانیت میں (فرض کرو) بیرم چرخیاں اور دندانے دار پہیے شامل ہیں اور وہ بطور خود اس طریقہ کا اندازہ لگا سکتا ہے جس میں رسیوں کو حرکت کرنا چاہئے اگر اس کے قیاسات صحیح ہیں۔ یہ عمل اس کے مماثل ہوگا جس کو ہم دفعہ ۲۶۰ میں بیان کر چکے ہیں لیکن ہم اسکی تقلید یہاں نہیں کریں گے۔

اس کے برخلاف اوپر کی میکانیت کی نوعیت کے متعلق کسی قیاس آرائی کے بغیر نیچے کے شخص کو یہ معلوم ہوگا کہ اگر رسیاں کسی نہ کسی میکانیت کے ذریعہ مربوط ہیں تو ان کی حرکت چند خاص قوانین کے تابع ہے مثلاً یہ کہنا کہ ہر ذرہ نیوٹن کے حرکت کے قانون کی پابندی کرتا ہے۔

اس کی تفہیم کے لیے فرض کرو کہ ہم سادہ ترین صورت لیتے ہیں اور فرض کرتے ہیں کہ صرف دو رسیاں ہیں اور یہ کہ اگر ایک رسی ا کو ایک انچ کھینچا جاتا ہے تو دوسری رسی ب ہمیشہ دو انچ چڑھتی ہے۔ میکانیت ایک بیرم، چرخیوں کا ایک نظام، یا دندانے دار پہیہ ہو سکتی ہے۔ لیکن خواہ وہ ان میں سے کوئی ہو یا ان سے بالکل مختلف کوئی اور انتظام ہو یہ معلوم ہوگا کہ رسی ا کی نیچے وار حرکت کو رسی ب پر ایک ایسی قوت لگا کر مقید کیا جا سکتا ہے جو ا پر عمل کرنے والی قوت کے نصف کے مساوی ہے۔ یہ حقیقت موہوم کام کے اصول سے منتج ہوتی ہے اور اس کو اس قیاس سے

کوئی تعلق نہیں ہے جو مخفی میکانیت کی نوعیت کے متعلق قائم کیا گیا ہو۔
اب ہمارے سامنے حسب ذیل سوال ہے: کیا ہم مخفی میکانیت کے کسی علم کے بغیر یہ دریافت کر سکتے ہیں کہ رسیوں کی کیا حرکت پیدا ہوگی اگر اِن کو کسی معلومہ طریقہ پر حرکت میں لایا جائے۔ اِس کا جواب یہ ہے کہ ہاں ہم ایسا کر سکتے ہیں بشرطیکہ ہمیں توانائی کی وہ مقدار معلوم ہو جو کسی قسم کی حرکت میں شامل رہتی ہے یعنے بشرطیکہ ہمیں ہر حرکت کی توانائی بالحرکت اور نیز ہر تشکیل (محل) کی توانائی بالقوہ معلوم ہو۔

اسی طرح اگر ہم تمثیلات سے حقیقتوں پر آئیں تو کائنات کی انتہائی میکانیت کے متعلق کسی علم کے بغیر ہم یہ معلوم کر سکتے ہیں کہ کسی ابتدائی شرطوں سے کیا حرکت پیدا ہوگی بشرطیکہ کائنات کے اُس حصّہ کی تمام تشکیلات کی توانائی بالحرکت اور توانائی بالقوہ معلوم ہو جس سے ہم بحث کر رہے ہیں۔

ہیملٹن کا اُصول

۲۶۴ — فرض کرو کہ ایک مادی نظام کے کسی واحد ذرہ کے محدد کسی آن لا، ما، ی ہیں اور اس کی کمیت ک، ہے اور فرض کرو کہ اِس پر جو قوتیں عمل کرتی ہیں اُس کے حاصل کے اجزائے ترکیبی لا، ما، ے ہیں۔
فرض کرو کہ اِس ذرہ کی رفتار کے اجزائے ترکیبی ع، و، طہ ہیں، اسلیے

$$ع_۱ = \frac{فر لا_۱}{فر ت}، \quad \text{وغیرہ}$$

اب اگر اِس ذرہ کی حرکت قوانین نیوٹن کے تابع ہے تو حاصل ہونا چاہئیے

$$ک_۱ \frac{فر ع_۱}{فر ت} = لا_۱، \qquad (۱۴۸)$$

$$\text{ک}_1 \frac{\text{فرو}_1}{\text{فرت}} = \text{ما}_1 \qquad (149)$$

$$\text{ک}_1 \frac{\text{فرط}_1}{\text{فرت}} = \text{ے}_1 \qquad (150)$$

(۳۲۴) فرض کرو کہ ہم اس حرکت کا مقابلہ قدرے مختلف حرکت سے جو قوانین نیوٹن کے تابع نہیں ہے کرتے ہیں۔ اس دوسری حرکت میں فرض کرو کہ ک₁ کے محدد اُس آن جس پر یہ محدد حقیقی حرکت میں لا₁، ما₁، ی₁ ہیں لاَ₁، ماَ₁، یَ₁ سے تعبیر کئے گئے ہیں اور فرض کرو کہ اس لمحہ پر رفتار کے اجزائے ترکیبی عَ₁، وَ₁، طَ₁ ہیں، اس لیے

$$\text{عَ}_1 = \frac{\text{فرلاَ}_1}{\text{فرت}} \quad \text{وغیرہ}$$

فرض کرو کہ یہ مرممہ حرکت حقیقی حرکت سے اسقدر خفیف فرق رکھتی ہے کہ لاَ₁ - لا₁، عَ₁ - ع₁ جیسی کوئی مقدار جو صرف اس فرق کے ایک حصہ کو تعبیر کرتی ہے ایک چھوٹی مقدار سمجھی جا سکتی ہے۔ فرض کرو کہ ہم لاَ₁ - لا₁ کو مف لا₁ سے تعبیر کرتے ہیں اور ایسی ہی ترقیم دوسرے فرقوں کے لئے استعمال کرتے ہیں۔

مساواتوں (۱۴۸)، (۱۴۹)، (۱۵۰) کو جو ہر لمحہ پر درست ہیں مف لا₁، مف ما₁، مف ی₁ سے ضرب دو اور جمع کرو تو

$$\text{ک}_1 \frac{\text{فرع}_1}{\text{فرت}} \text{مف لا}_1 + \text{ک}_1 \frac{\text{فرو}_1}{\text{فرت}} \text{مف ما}_1 + \text{ک}_1 \frac{\text{فرط}_1}{\text{فرت}} \text{مف ی}_1$$

$$= \text{لا}_1 \text{مف لا}_1 + \text{ما}_1 \text{مف ما}_1 + \text{ے}_1 \text{مف ی}_1 \qquad (151)$$

اب

$$\frac{\text{فرع}_1}{\text{فرت}} \text{مف لا}_1 = \frac{\text{فر}}{\text{فرت}} (\text{ع}_1 \text{مف لا}_1) - \text{ع}_1 \frac{\text{فر}}{\text{فرت}} (\text{مف لا}_1)$$

$$= \frac{\text{فر}}{\text{فرت}} (\text{ع}_1 \text{مف لا}_1) - \text{ع}_1 \frac{\text{فر}}{\text{فرت}} (\text{لاَ}_1 - \text{لا}_1)$$

$$= \frac{فر}{فرت} (ع_۱ مف لا_۱) - ع_۱ (عَ_۱ - ع_۱)$$

$$= \frac{فر}{فرت} (ع_۱ مف لا_۱) - ع_۱ مف ع_۱$$

اِس لئے

$$ک_۱ \frac{فرع_۱}{فرت} مف لا_۱ + ک_۱ \frac{فرو_۱}{فرت} مف ما_۱ + ک_۱ \frac{فرط_۱}{فرت} مف ی_۱$$

$$= ک_۱ \Big[\frac{فر}{فرت} (ع_۱ مف لا_۱ + و_۱ مف ما_۱ + ط_۱ مف ی_۱)$$

$$- (ع_۱ مف ع_۱ + و_۱ مف و_۱ + ط_۱ مف ط_۱) \Big]$$

$$= لا_۱ مف لا_۱ + ما_۱ مف ما_۱ + ے_۱ مف ی_۱ \quad (۱۵۲)$$

بموجب مساوات (۱۵۱)

(۳۲۵) اِس قسم کی مساوات نظام کے ہر ذرہ کے لیے اور حرکت کے ہر لمحہ پر درست ہے۔ نیز وہ درست ہے خواہ ہٹی ہوئی حرکت کچھ ہی ہو۔ اِس مساوات کو تمام ذروں کے لیے جمع کرنے پر حاصل ہوتا ہے

$$\Sigma ک_۱ \Big[\frac{فر}{فرت} (ع_۱ مف لا_۱ + و_۱ مف ما_۱ + ط_۱ مف ی_۱)$$

$$- (ع_۱ مف ع_۱) + و_۱ مف و_۱ + ط_۱ مف ط_۱) \Big]$$

$$= \Sigma (لا_۱ مف لا_۱ + ما_۱ مف ما_۱ + ے_۱ مف ی_۱)$$

.... (۱۵۳)

اب فرض کرو کہ حرکت کی توانائی بالحرکت ت سے تعبیر ہوتی ہے تو

$$ت = \frac{۱}{۲} \Sigma ک_۱ (ع_۱^۲ + و_۱^۲ + ط_۱^۲)$$

$$تب \quad مف ت = \frac{۱}{۲} \Sigma ک_۱ (عَ_۱^۲ - ع_۱^۲ + وَ_۱^۲ - و_۱^۲ + طَ_۱^۲ - ط_۱^۲)$$

لیکن $ع^2 - ع_1^2 = (ع_1 + مف ع_1)^2 - ع_1^2 = ۲ ع_1 مف ع_1$

اگر ہم دوسرے رتبہ (مف $ع_1)^2$ کی چھوٹی مقدار کو نظر انداز کردیں۔ اِس لیے

$$مف ت = \sum ک_1 (ع_1 مف ع_1 + و_1 مف و_1 + ط_1 مف ط_1)$$

۲۶۵ — فی الحال مان لو کہ قوتوں کا نظام بقائی ہے اور فرض کرو کہ زیر بحث لمحہ پر نظام کی توانائی بالقوہ ک ہے اور خفیف طور پر ہٹی ہوئی تشکیل میں خیالی نظام کی توانائی بالقوہ کَ ہے۔ تب بموجب دفعہ ۱۱۸

$$مف ک = کَ - ک$$

= (وہ کام جو نظام کو حقیقی تشکیل سے ہٹی ہوئی تشکیل تک حرکت دینے میں انجام پایا)

$$= - \sum (لا_1 مف لا_1 + ما_1 مف ما_1 + ے_1 مف ی_1)$$

(۱۵۴)

مساوات (۱۵۳) میں اُن جملوں کی بجائے جو مف ت اور مف ک کے مساوی معلوم کئے گئے ہیں اندراج کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ یہ مساوات حسب ذیل سادہ شکل میں تحویل ہوتی ہے:

$$\sum ک_1 \frac{فر}{فرت} (ع_1 مف لا_1 + و_1 مف ما_1 + ط_1 مف ی_1) - مف ت = - مف ک$$

$$یا \quad \frac{فر}{فرت} \sum ک_1 (ع_1 مف لا_1 + و_1 مف ما_1 + ط_1 مف ی_1) = مف (ت - ک)$$

یہ مساوات حرکت کے ہر لمحہ پر درست ہے۔ فرض کرو کہ ہم اس کا تکمل حرکت کے کسی دو لمحوں ت = ت$_1$ اور ت = ت$_2$ کے درمیان کرتے ہیں تو (۲۲۶)

$$\left[\sum ک_1 (ع_1 مف لا_1 + و_1 مف ما_1 + ط_1 مف ی_1) \right]_{ت_1}^{ت_2}$$

$$= \int_{ت_1}^{ت_2} مف\,(ت - ک)\,فرت \qquad (۱۵۵)$$

ہٹی ہوئی حرکت ابتک کسی قید کے تحت نہیں رہی الّا آنکہ اس کے اور حقیقی حرکت کے درمیان فرق ہمیشہ خفیف ہونا چاہئے - اب ہم ایک اور قید عائد کرتے ہیں کہ اوقات $ت_1$ اور $ت_2$ پر ہٹی ہوئی حرکت میں تشکیلات ان تشکیلات پر منطبق ہوتی ہیں جو حقیقی حرکت میں حاصل ہوتی ہیں - پس ہٹی ہوئی حرکت اب وہ ہے جس میں خیالی نظام وقت $ت = ت_1$ پر اسی تشکیل میں حرکت کی ابتدا کرتا ہے جس میں حقیقی نظام وقت $ت = ت_1$ پر کرتا ہے، اس کے بعد خیالی نظام وقت $ت_1$ سے $ت_2$ تک اس راستہ سے جس پر حقیقی نظام حرکت کرتا ہے ذرا ہٹا ہوا حرکت کرتا ہے (کیونکہ حقیقی نظام قوانین نیوٹن کے تحت حرکت کرتا ہے اور خیالی نظام کی حرکت اس کے تحت نہیں ہے) اور بالآخر وقت $ت_2$ پر اسی محل میں آجاتا ہے جس میں حقیقی نظام آتا ہے -

خیالی نظام پر اس شرط کے عائد کرنے سے اوقات $ت_1$ اور $ت_2$ پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$مف\,لا_1 = مف\,ما_1 = مف\,ی_1 = ۰$$

اور اسی وضع کے رشتے دوسرے ذروں کے لئے - پس

$$\left[\sum ک_1\,(ع_1\,مف\,لا_1 + و_1\,مف\,ما_1 + ط_1\,مف\,ی_1)\right]_{ت_1}^{ت_2} = ۰$$

اور مساوات (۱۵۵) ہو جاتی ہے

$$\int_{ت_1}^{ت_2} مف\,(ت - ک)\,فرت = ۰$$

یہ ایک ایسی مساوات ہے جو صرف نظام کی توانائی بالحرکت اور توانائی بالقوہ کی مقداروں پر منحصر ہے اور نظام کی میکانیت پر منحصر نہیں ہے - ہم دیکھیں گے کہ اس واحد مساوات سے نظام کے تمام معلومہ

حصوں کی حرکت معلوم کی جا سکتی ہے جوں ہی ت اور ک معلوم ہو جائیں اور اس کے لئے غیر معلومہ حصوں کی میکانیت کے علم کی ضرورت نہیں ہے۔

(۳۲۷)

۲۶۶ — اس کو ثابت کرنے سے پیشتر ہم مساوات (۱۵۶) کو سمجھنے کی کوشش کریں گے۔ فرض کرو کہ ہم ت - ک کو ل سے تعبیر کرتے ہیں۔ اب

$$\int_{ت_1}^{ت_2} \text{مف}\,(ت - ک)\, \text{فرت} = \int_{ت_1}^{ت_2} \text{مف}\; ل\; \text{فرت}$$

$$= \int_{ت_1}^{ت_2} (لَ - ل)\; \text{فرت}$$

$$= \int_{ت_1}^{ت_2} لَ\; \text{فرت} - \int_{ت_1}^{ت_2} ل\; \text{فرت}$$

$$= \text{مف} \left(\int_{ت_1}^{ت_2} ل\; \text{فرت} \right)$$

اگر ہم

$$\int_{ت_1}^{ت_2} ل\; \text{فرت}$$

کو س سے تعبیر کریں تو یہ مساوات مف س = ۰ ہو جاتی ہے یا

$$سَ = س$$

اس طرح دوسری اور اعلیٰ ترتیبوں کی چھوٹی مقداروں کو نظر انداز کیا جائے تو حقیقی حرکت کے لئے تفاعل س کی قیمت وہی ہے جو کسی خفیف طور پر مختلف حرکت کے لیے متناظر تفاعل سَ کی ہے جبکہ یہ مختلف حرکت وہی لمحوں پر وہی تشکیلات سے حرکت کی ابتدا اور اختتام کرے۔ دوسرے الفاظ میں تفاعل س اعظم ہوتا ہے یا اقل جبکہ تشکیلات کا سلسلہ وہی ہو جو فطرت میں فی الواقعی وقوع پذیر ہوتا ہے۔

اقل ترین عمل کا اُصول

۲۶۷ — حقیقی حرکت کی اثناء میں کُل توانائی حسب مسئلہ دفعہ (۱۴۳) مستقل رہے گی، فرض کرو کہ کُل توانائی ع سے تعبیر ہوتی ہے تو ہر لمحہ پر ہمیں حاصل ہوگا

ت + ک = ع ، ت - ک = ل

تشکیلات کے خفیف طور پر متغیر سلسلہ میں یہ کہنا صحیح نہیں ہے کہ اثنائے حرکت میں کُل توانائی مستقل رہتی ہے لیکن تشکیلات کے خفیف طور پر متغیر سلسلوں کی لامتناہی تعداد میں سے پھر بھی لامتناہی تعداد بچ رہے گی جن کے لئے مذکورۂ بالا شرطیں معہ اس شرط کے کہ ہر لمحہ پر کُل توانائی ع ہونی چاہیئے پوری ہونگی - ایسے کسی سلسلے کے لیے حاصل ہوگا، (۳۲۸)

تَ + کَ = ع ، تَ - کَ = لَ

پس ل = ۲ت - ع ، لَ = ۲تَ - ع

اس لئے

س = $\int_{ت_1}^{ت_2}$ ل فرت

= $\int_{ت_1}^{ت_2}$ (۲ت - ع) فرت

= $\int_{ت_1}^{ت_2}$ ۲ت فرت - (ت۲ - ت۱) ع

پس اگر س اعظم یا اقل ہو تو یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ

$\int_{ت_1}^{ت_2}$ ۲ت فرت

اعظم ہے یا اقل۔ اس تکملہ کو حرکت کا عمل کہتے ہیں۔ اب ہم دیکھتے ہیں کہ تشکیلات کے تمام ممکن سلسلوں میں جو نظام کو ایک تشکیل سے دوسری تشکیل تک معلومہ وقت میں اس طریقہ پر لاتے ہیں کہ کل توانائی ہمیشہ ایک مخصوص مستقل کے مساوی ہوتی ہے وہ سلسلہ جو ایک فطری نظام سے مرتسم ہو سکتا ہے وہ ہے جس پر عمل اعظم ہے یا اقل۔ اب چونکہ عمل بالعموم اقل ہوتا ہے اس لیے اس اصول کو **اقل ترین عمل کا اصول** کہتے ہیں۔

اس اصول کو اولاً موپرٹینز (Maupertius) نے بیان کیا تھا لیکن اس نے اس کو استدلال ریاضی سے ماخوذ نہیں کیا تھا بلکہ اس کو اس امر کا یقین تھا کہ یہ ثابت کیا جا سکتا ہے کہ کائنات کی تبدیلیاں اس طرح وقوع پذیر ہونی چاہئیں کہ عمل اقل ہو (Essai de Cosmologie, 1751)۔

غیر بقائی قوتیں

۲۶۸ — اگر قوتیں بقائی نہ ہوں تو ہم مساوات (۱۵۴) میں

$$\Sigma\ (لا_۱ \text{ مف } لا + ما_۱ \text{ مف } ما + ی_۱ \text{ مف } ی)$$

کی بجائے ۔ مف ک نہیں رکھ سکتے اور اس لیے مساوات (۱۵۶) کی بجائے حسب ذیل مساوات حاصل ہو گی:

$$\int_{ت_۱}^{ت_۲} [\text{مف } ت + \Sigma\ (لا_۱ \text{ مف } لا + ما_۱ \text{ مف } ما + ی_۱ \text{ مف } ی)]\ فرت = ۰ \qquad (۱۵۷)$$

لگرانج کی مساواتیں

۲۶۹ — اگر نظام کے ہر ذرہ کے محدد لا، ما، ی، وغیرہ معلوم ہوں تو

ہم نہ صرف نظام کی تشکیل معلوم کر سکتے ہیں بلکہ وہ میکانیت بھی جس کے ذریعہ نظام کے مختلف اجزاء مربوط ہیں۔ تاہم یہ ہو سکتا ہے کہ مقداروں کی کمتر تعداد معلوم ہونے پر بھی نظام کی تشکیل متعین ہو سکے حالانکہ مقداروں کی اس تعداد سے میکانیت کا کوئی علم حاصل نہ ہوتا ہو۔

مثلاً ہماری پچھلی تمثیل میں ہم نے تصور کیا تھا کہ ایک نامعلوم مشین سے دو رسیاں لٹکتی ہیں اور رسیاں ایسے طریقہ پر مربوط ہیں کہ ایک رسی میں ایک انچ کی حرکت دوسری رسی میں ہمیشہ دو انچ کی حرکت پیدا کرتی ہے۔ اس صورت میں تشکیل پوری طرح معلوم ہو جاتی ہے جبکہ وہ واحد محدد معلوم ہو جائے جو پہلی رسی کے سرے کے محل کی پیمائش کرتا ہے۔ لیکن اس محدد کے معلوم ہونے سے رسیوں کو ملانے والی مکانیت کا علم حاصل ہونا ضروری نہیں ہے۔

نیز ہم دفعہ ۶۵ میں دیکھ چکے ہیں کہ کسی اُستوار جسم کا محل کافی مقداروں (چھ) کی قیمتوں سے متعین ہو جاتا ہے، یہ مقداریں جسم کے تین ناہم خط ذرّوں کے محل فضا میں معلوم کرنے کے لیے مطلوب ہوتے ہیں۔ لیکن ان مقداروں کے علم سے اُن ذرّوں کی ترتیب کے متعلق کوئی علم حاصل نہیں ہوتا جن سے جسم بنا ہے۔

فرض کرو کہ مقداروں $ط_۱$، $ط_۲$، .... $ط_ن$ کا ایک جٹ ایسا ہے کہ ان کی قیمت معلوم ہو تو اجسام کے ایک نظام کی تشکیل پوری طرح متعین ہو جاتی ہے۔ تب ان مقداروں $ط_۱$، $ط_۲$، ... $ط_ن$ کو نظام کے تعمیم شدہ محدد کہا جاتا ہے۔

۲۷۰۔ فرض کرو کہ نظام کے کسی ذرہ کے محدد لا، ما، ہی ہیں۔ تب $ط_۱$، $ط_۲$، .... $ط_ن$ کی قیمتوں سے لا پوری طرح معلوم ہوتا ہے اور اس لئے وہ ان مقداروں کا ایک تفاعل ہے، فرض کرو

$$لا = ف\ (ط_۱،\ ط_۲،\ ....\ ط_ن) \qquad (۱۵۸)$$

اگر نظام متحرک ہے تو مساوات (۱۵۸) کی تمام مقداریں وقت کے تفاعل ہیں۔ پس وقت کے لحاظ سے تفرق کرنے پر حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{فرلا}}{\text{فزت}} = \frac{\text{جف ف}}{\text{جف طہ}_1}\,\frac{\text{فرطہ}_1}{\text{فزت}} + \frac{\text{جف ف}}{\text{جف طہ}_2}\,\frac{\text{فرطہ}_2}{\text{فزت}} + \ldots\ldots\ldots + \frac{\text{جف ف}}{\text{جف طہ}_\text{ن}}\,\frac{\text{فرطہ}_\text{ن}}{\text{فزت}}$$

(۳۳۰) اختصار کی خاطر فرض کرو کہ ہم $\frac{\text{فرلا}}{\text{فزت}}$ ، $\frac{\text{فرطہ}_1}{\text{فزت}}$ ،..... کو لا ، طہ_1 ،..... سے تعبیر کرتے ہیں۔ اب محصلۂ بالا مساوات کو لکھا جا سکتا ہے

$$\text{لا} = \frac{\text{جف ف}}{\text{جف طہ}_1}\,\text{طہ}_1 + \frac{\text{جف ف}}{\text{جف طہ}_2}\,\text{طہ}_2 + \ldots + \frac{\text{جف ف}}{\text{جف طہ}_\text{ن}}\,\text{طہ}_\text{ن} \qquad (۱۵۹)$$

اِس لئے لا ایک خطی تفاعل ہے طہ_1، طہ_2، ..... ، $\text{طہ}_\text{ن}$ کا جن کے سر طہ_1، طہ_2، .... ، $\text{طہ}_\text{ن}$ کے تفاعل ہیں۔

توانائی بالحرکت

$$\text{ت} = \frac{1}{2}\sum \text{ک}\,(\text{لا}^2 + \text{ما}^2 + \text{نی}^2)$$

طہ_1، طہ_2، .... ، $\text{طہ}_\text{ن}$ کا ایک دو درجی تفاعل ہے جس کے سر طہ_1، طہ_2، ..... ، $\text{طہ}_\text{ن}$ کے تفاعل ہیں

توانائی بالقوہ ک صرف نظام کی تشکیل پر منحصر ہوتی ہے اور اسلیے ک ایک تفاعل ہے صرف طہ_1، طہ_2، ..... ، $\text{طہ}_\text{ن}$ کا۔

اس طرح تفاعل ل یا ت۔ک ،

طہ_1، طہ_2، ..... ، $\text{طہ}_\text{ن}$ ، طہ_1، طہ_2، .... $\text{طہ}_\text{ن}$

کا ایک تفاعل ہے، فرض کرو

$$\text{ل} = \text{فہ}\,(\text{طہ}_1، \text{طہ}_2، \ldots، \text{طہ}_\text{ن}، \text{طہ}_1، \text{طہ}_2، \ldots، \text{طہ}_\text{ن}) \qquad (۱۶۰)$$

ہٹی ہوئی حرکت میں متناظر تفاعل لَ ،

طہ۱ + مف طہ۱، طہ۲ + مف طہ۲، ..... وغیرہ

کا وہی تفاعل ہے اور اِس لیے

لَ = فہ (طہ۱ + مف طہ۱، طہ۲ + مف طہ۲، ... طہن + مف طہن، ظہ۱ + مف ظہ۱، ...)

ٹیلر کے مسئلہ سے ہم لَ کو شکل

لَ = فہ (طہ۱، طہ۲، .... طہن، ظہ۱، ...)

+ مف طہ۱ (جف فہ)/(جف طہ۱) + مف طہ۲ (جف فہ)/(جف طہ۲) + ... + مف طہن (جف فہ)/(جف طہن)

+ مف ظہ۱ (جف فہ)/(جف ظہ۱) + ...

میں پھیلا سکتے ہیں اور اس لیے مساوات (۱۶۰) سے حاصل ہوتا ہے

لَ = ل + Σ۱ن مف طہ۱ (جف ل)/(جف طہ۱) + Σ۱ن مف ظہ۱ (جف ل)/(جف ظہ۱)   (۱۶۱)

(۳۳۱)

مساوات (۱۵۶)

∫ت۱ت۲ مف (ت - ک) فرت = ۰

کو شکل

∫ت۱ت۲ (لَ - ل) فرت = ۰

میں لکھا جا سکتا ہے اور اب ہم دیکھتے ہیں کہ اِس کی بجائے

∫ت۱ت۲ (Σ۱ن مف طہ۱ (جف ل)/(جف طہ۱) + Σ۱ن مف ظہ۱ (جف ل)/(جف ظہ۱)) فرت = ۰

(۱۶۲)

کو لکھا جا سکتا ہے۔

لیکن

مف طہ = طہَ ـ طہ = $\frac{\text{فر}}{\text{فرت}}$ (طہ + مف طہ) ـ $\frac{\text{فر}}{\text{فرت}}$ طہ = $\frac{\text{فر}}{\text{فرت}}$ (مف طہ)

اِس لئے $\int_{\text{ت}_1}^{\text{ت}_2} \frac{\text{جف ل}}{\text{جف طہ}_1}$ مف طہ فرت = $\int_{\text{ت}_1}^{\text{ت}_2} \frac{\text{جف ل}}{\text{جف طہ}_1} \frac{\text{فر}}{\text{فرت}}$ (مف طہ) فرت

اور تکمل بالحصص سے یہ ہو جاتا ہے

$$\left[\frac{\text{جف ل}}{\text{جف طہ}_1} \text{مف طہ}\right]_{\text{ت}_1}^{\text{ت}_2} - \int_{\text{ت}_1}^{\text{ت}_2} \frac{\text{فر}}{\text{فرت}} \left(\frac{\text{جف ل}}{\text{جف طہ}_1}\right) \text{مف طہ فرت} \quad (۱۶۳)$$

چونکہ ہٹی ہوئی تشکیل بموجب فرض حقیقی تشکیل پر منطبق ہوتی ہے اس لیے اوقات ت۱ اور ت۲ پر مف طہ = ۰۔ اِس طرح پھیلاؤ (۱۶۳) میں پہلی رقم معدوم ہوتی ہے اور حاصل ہوتا ہے

$$\int_{\text{ت}_1}^{\text{ت}_2} \frac{\text{جف ل}}{\text{جف طہ}_1} \text{مف طہ فرت} = -\int_{\text{ت}_1}^{\text{ت}_2} \frac{\text{فر}}{\text{فرت}} \left(\frac{\text{جف ل}}{\text{جف طہ}_1}\right) \text{مف طہ فرت}$$

اب مساوات (۱۶۲) شکل

$$\int_{\text{ت}_1}^{\text{ت}_2} \left\{ \sum^{\text{ن}} \text{مف طہ} \left[\frac{\text{جف ل}}{\text{جف طہ}_1} - \frac{\text{فر}}{\text{فرت}} \left(\frac{\text{جف ل}}{\text{جف طہ}_1}\right)\right] \right\} \text{فرت} = ۰ \quad (۱۶۴)$$

اختیار کرتی ہے ۔

حدود ت۱ اور ت۲ بالکلیہ ہمارے اختیار میں ہیں، مساوات درست رہے گی خواہ ت۱ اور ت۲ کو ہم کوئی قیمتیں دیں ۔ دوسرے الفاظ میں چھوٹے تفرقیوں کی ایک تعداد کا مجموعہ معدوم ہوتا ہے خواہ مجموعہ میں ایسے کتنے ہی تفرقی شامل ہوں ۔ اِس سے یہ نتیجہ بر آمد ہوتا ہے کہ مجموعہ کی ہر رقم معدوم ہونی چاہیے، اِس لیے ہر لمحہ پر ہمیں حاصل ہونا چاہیے (۴۳۲)

$$\sum^{\text{ن}} \text{مف طہ} \left[\frac{\text{جف ل}}{\text{جف طہ}_1} - \frac{\text{فر}}{\text{فرت}} \left(\frac{\text{جف ل}}{\text{جف طہ}_1}\right)\right] = ۰ \quad (۱۶۵)$$

۲۷۱ ــ اِس موقع پر ہمیں دو متبادلات پر غور کرنا ہوگا ۔ یہ ہو سکتا ہے کہ

مف طہ۱، مف طہ۲، . . . ، مف طہن کی خواہ ہم کوئی قیمتیں مقرر کریں نئی تشکیل جس کا تشخص محددوں

طہ۱ + مف طہ۱، طہ۲ + مف طہ۲، . . . ، طہن + مف طہن

کے ذریعہ ہوتا ہے ایک ممکن تشکیل ہو یعنی یہ تشکیل ایسی ہوگی کہ نظام اس کو اختیار کر سکتا ہے اور اس کی میکانیت سے جو قیود عائد ہوتے ہیں ان میں خلل نہیں پڑتا۔ اس صورت میں ہم کہتے ہیں کہ نظام "آزادی کے ن درجے" رکھتا ہے۔

اگر نظام آزادی کے ن درجے رکھے تو مساوات (۱۶۵) مف طہ۱، مف طہ۲، . . . مف طہن کی تمام قیمتوں کے لیے درست ہے۔ مثلاً وہ درست ہے اگر ہم لیں

مف طہ۱ = صہ، مف طہ۲ = مف طہ۳ = . . . = مف طہن = ۰

جہاں صہ کوئی چھوٹی مقدار ہے۔ اس صورت میں ہمیں حاصل ہونا چاہیے

$$\text{صہ}\left[\frac{\text{جف ل}}{\text{جف طہ}_1} - \frac{\text{فر}}{\text{فرت}}\left(\frac{\text{جف ل}}{\text{جف طہ}_1}\right)\right] = 0$$

اور اس لیے

$$\frac{\text{فر}}{\text{فرت}}\left(\frac{\text{جف ل}}{\text{جف طہ}_1}\right) - \frac{\text{جف ل}}{\text{جف طہ}_1} = 0$$

محددوں طہ۱، طہ۲، . . . ، طہن میں سے ہر ایک کے لیے اس کے مشابہ مساوات درست رہے گی۔ ان مساواتوں کو لگرانج کی مساواتیں کہتے ہیں۔ ن نامعلوم مقداروں طہ۱، طہ۲، . . . ، طہن اور وقت کے لحاظ سے ان کے تفرقی سروں کے درمیان ایسی ن مساواتیں ہوں گی۔ اس لیے ہم ان سے وہ طریقہ معلوم کر سکتے ہیں جس میں طہ۱، طہ۲، . . . ، طہن وقت کے ساتھ بدلتے ہیں۔ ان مساواتوں کو استعمال کرنے میں ہمیں صرف تفاعل ل کے جاننے کی ضرورت ہے اور اس لیے نظام کی

صرف توانائی بالحرکت اور توانائی بالقوہ کو جاننا ضروری ہے، نظام کی اندرونی میکانیت کے علم کی ضرورت نہیں پڑتی۔ اِس طرح دفعہ (۲۶۳) کا مجوزہ مسئلہ حل ہو چکا اگر ہم لگرانج کی مساواتیں حل کر سکیں۔

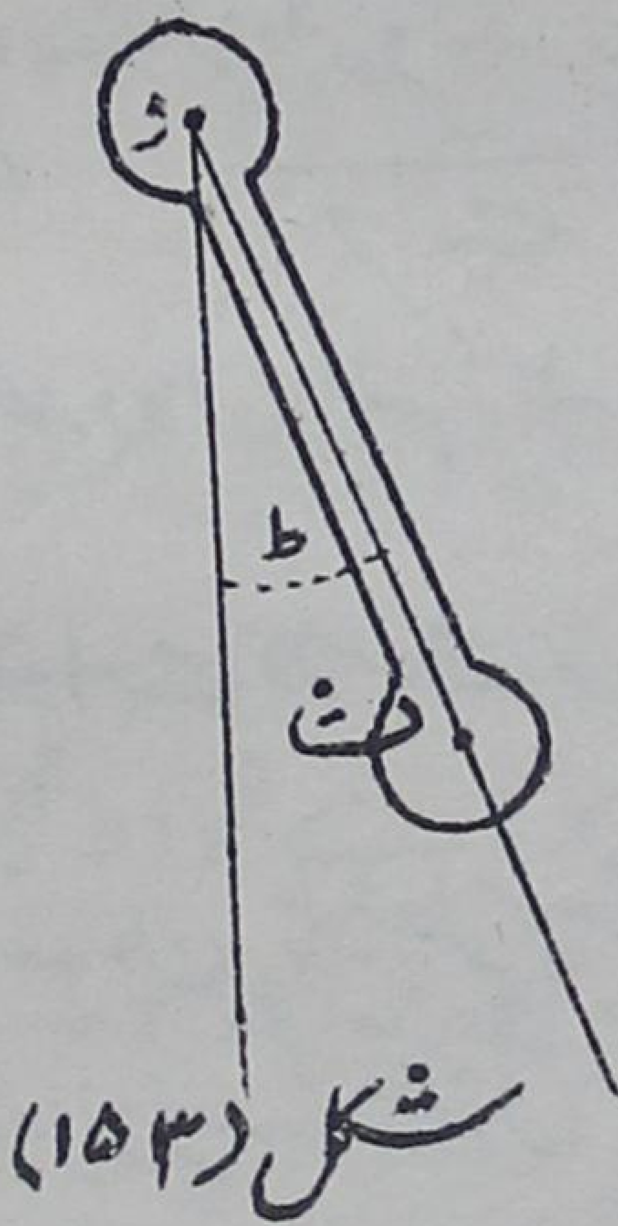
(۳۳۳)

توضیحی مثال

عام رقاص۔ فرض کرو کہ ہم لگرانج کی مساواتوں کو ایک سادہ مثال پر استعمال کرتے ہیں چنانچہ عام رقاص کی حرکت کے مسئلہ پر غور کرو۔ ایک اُستوار جسم حرکت کرنے میں اِس طور پر مقید ہے کہ ایک نقطہ و ثابت رہتا ہے اور خط و ث جو و کو مرکز ثقل سے ملاتا ہے ایک انتصابی سُتوی میں حرکت کرتا ہے۔ فرض کرو کہ و ث کا میلان سمت انتصابی سے ط ہے، تب نظام کا محل بالکلیہ مقرر ہو جاتا ہے جوں ہی ط کی قیمت معلوم ہو۔ دفعہ (۲۴۵) کی ترقیم میں توانائی بالحرکت اور توانائی بالقوہ حسب ذیل ہیں:

$$ت = \frac{1}{2} ک گ^2 ط^{.2} ، \quad م = ک ج ہ (1 - جم ط)$$

جہاں م توانائی بالقوہ ہے اور ک کل کمیت۔ اِس لیے



شکل (۱۵۴)

$$ل = \frac{1}{2} ک گ^2 ط^{.2} - ک ج ہ (1 - جم ط)$$

اِس طرح $\frac{جف ل}{جف ط^.} = ک گ^2 ط^.$ اور

لگرانج کی مساوات

$$\frac{فر}{فرت}\left(\frac{جف ل}{جف ط^.}\right) = \frac{جف ل}{جف ط}$$

ہو جاتی ہے $$ک گ^2 \frac{فر^2 ط}{فرت^2} = - ک ج ہ جب ط$$

یہ وہی مساوات ہے جو دفعہ ۲۴۵ میں حاصل ہوئی تھی اور اس سے حرکت معلوم کی جاسکتی ہے۔

ہم دیکھتے ہیں کہ لگرانج کے طریقہ سے یہ ظاہر ہے کہ حرکت اُس طریقہ پر منحصر نہیں ہے جو رقاص کو لٹکانے کا ہے، صرف یہ شرط ہے کہ وہ مذکورۂ بالا طریقہ پر حرکت کرنے پر مجبور ہو۔ مثلاً نتیجہ درست رہتا ہے اگر و پر کوئی ٹیکن ہی نہ ہو اور ڈوریوں کے ذریعہ قیود عائد کئے جائیں۔

۲۷۲ — اب ہم دوسرے متبادل پر غور کریں گے۔ یہ ہوسکتا ہے کہ اگر ہم مف طہ، مف طہ$_۲$ ... مف طہ$_ن$ کی اختیاری قیمتیں مقرر کریں تو حاصل شدہ نئی تشکیل ہر صورت میں ممکن تشکیل نہ ہو۔ یہ ہوسکتا ہے کہ بعض خاص رشتے ہوں جو پورے ہونے چاہئیں تاکہ میکانیت کی باعث جو قیود ہیں ان میں کوئی خلل نہ پڑے۔

مثلاً اُس تمثیل میں جو قبل ازیں استعمال ہوچکی ہے فرض کرو کہ ایک کمرہ کی چھت سے دو رسیاں لٹک رہی ہیں اور یہ کہ اگر ایک رسی کو ایک انچ کھینچا جاتا ہے تو اوپر کی میکانیت دوسری رسی کو دو انچ اوپر چڑھنے پر مجبور کرتی ہے۔ فرض کرو کہ چھت کے نیچے رسیوں کے طول طہ$_۱$، طہ$_۲$ سے تعبیر ہوتے ہیں۔ اب ایسا ہٹاؤ جس میں مف طہ$_۱$ = $\frac{۱}{۱۰}$ انچ اور مف طہ$_۲$ = $\frac{۱}{۵۰}$ انچ ممکن ہٹاؤ نہیں ہے کیونکہ اوپر کی میکانیت ایسے ہٹاؤ کی اجازت نہیں دیتی۔ مف طہ$_۱$، مف طہ$_۲$ میں ہمیشہ ربط

$$\text{مف طہ}_۱ + \tfrac{۱}{۲}\,\text{مف طہ}_۲ = ۰$$

ہونا چاہئے۔

عام صورت میں فرض کرو کہ میکانیت کی باعث چند قیود عائد ہوتے ہیں، ان قیود کی شکل (۳۳۴)

$$ا_۱\,\text{مف طہ}_۱ + ا_۲\,\text{مف طہ}_۲ + \ldots + ا_ن\,\text{مف طہ}_ن = ۰ \quad (۱۶۶)$$

$$ب_۱\,\text{مف طہ}_۱ + ب_۲\,\text{مف طہ}_۲ + \ldots + ب_ن\,\text{مف طہ}_ن = ۰ \quad (۱۶۷)$$

وغیرہ ہے۔ تب مساوات (۱۶۵)

$$\text{مف طہ}_1 \left[\frac{\text{جف ل}}{\text{جف طہ}_1} - \left(\frac{\text{جف ل}}{\text{جف طہ}_1} \right) \frac{\text{فر}}{\text{فزت}} \right] \sum_1^{\text{ن}} = \cdot \quad (۱۶۸)$$

صرف اسوقت درست ہے جبکہ مف طہ$_1$، مف طہ$_2$، ... مف طہ$_{\text{ن}}$ رشتوں (۱۶۶) (۱۶۷)، .... کو پورا کریں۔

لیکن ممکن ہٹاؤ کے لیے مف طہ$_1$، مف طہ$_2$، ....، مف طہ$_{\text{ن}}$ ایسے ہوں گے کہ یہ رشتے (۱۶۶)، (۱۶۷)، ... سب کے سب درست ہوں گے۔ فرض کرو کہ ہم لہ، مہ، .... اور اکائی سے ضرب دیتے ہیں اور جمع کرتے ہیں جہاں لہ، مہ، .... تا حال غیر معین مقداریں ہیں، ہم اِن کو غیر معین ضارب کہہ سکتے ہیں۔ اب مساوات حاصل ہوتی ہے:

$$\text{مف طہ}_1 \left[\frac{\text{جف ل}}{\text{جف طہ}_1} - \left(\frac{\text{جف ل}}{\text{جف طہ}_1} \right) \frac{\text{فر}}{\text{فزت}} + \text{لہ ا}_1 + \text{مہ ب}_1 + \ldots \right]$$

$$+ \text{مف طہ}_2 \left[\frac{\text{جف ل}}{\text{جف طہ}_2} - \left(\frac{\text{جف ل}}{\text{جف طہ}_2} \right) \frac{\text{فر}}{\text{فزت}} + \text{لہ ا}_2 + \text{مہ ب}_2 + \ldots \right]$$

$$+ \ldots + \left[\frac{\text{جف ل}}{\text{جف طہ}_{\text{ن}}} - \left(\frac{\text{جف ل}}{\text{جف طہ}_{\text{ن}}} \right) \frac{\text{فر}}{\text{فزت}} + \text{لہ ا}_{\text{ن}} \right.$$

$$\left. + \text{مہ ب}_{\text{ن}} + \ldots \right] \text{مف طہ}_{\text{ن}} = \cdot \quad (۱۶۹)$$

مقداریں مف طہ$_1$، مف طہ$_2$، ...، مف طہ$_{\text{ن}}$ اختیاری نہیں ہیں لیکن اگر نمونہ (۱۶۶) کے رشتے تعداد میں م ہوں تو ہم کہہ سکتے ہیں کہ مقداروں مف طہ$_1$، مف طہ$_2$، ....، مف طہ$_{\text{ن}}$ میں سے تمام اِلاّ م کے اختیاری ہیں اور اِن مقداروں میں سے (ن - م) مقداروں کو اختیاری قیمتیں دیکر باقی م مقداروں کو مساواتوں (۱۶۶)، (۱۶۷)، .... کے حل سے معلوم کرنا چاہیئے۔ اِس طریقہ پر حاصل شدہ تشکیل بالضرور ممکن تشکیل ہونی چاہیئے فرض کرو کہ ہم

مف طہ$_{\text{م}+1}$، مف طہ$_{\text{م}+2}$، ....، مف طہ$_{\text{ن}}$

(۳۳۵)

کو اختیاری قیمتیں دیتے ہیں اور پھر مساواتوں (۱۶۶)، (۱۶۷)، ..... سے مف طہ_1، مف طہ_2، .... $\text{مف طہ}_{\text{م}}$ کی قیمتیں معلوم کرتے ہیں ۔ نیز ہم م غیر معین ضاربوں لہ، مہ، .... کا انتخاب کرتے ہیں اس طور پر کہ وہ م مساواتوں

$$\frac{\text{فر}}{\text{فزت}}\left(\frac{\text{جف ل}}{\text{جف طہ}_1}\right) - \frac{\text{جف ل}}{\text{جف طہ}_1} + \text{لہ ا}_1 + \text{مہ ب}_1 + \dots = 0$$

(۱۷۰)

. . . .

$$\frac{\text{فر}}{\text{فزت}}\left(\frac{\text{جف ل}}{\text{جف طہ}_{\text{م}}}\right) - \frac{\text{جف ل}}{\text{جف طہ}_{\text{م}}} + \text{لہ ا}_{\text{م}} + \text{مہ ب}_{\text{م}} + \dots = 0$$

(۱۷۱)

کو پورا کرتے ہیں جہاں لاحقے ا تا م ہیں ۔ تب مساوات (۱۶۹) ہوجاتی ہے

$$\sum_{\text{م}+1}^{\text{ن}}\left[\frac{\text{فر}}{\text{فزت}}\left(\frac{\text{جف ل}}{\text{جف طہ}_{\text{م}+1}}\right) - \frac{\text{جف ل}}{\text{جف طہ}_{\text{م}+1}} + \text{لہ ا}_{\text{م}+1} + \text{مہ ب}_{\text{م}+1} + \dots\right] \text{مف طہ}_{\text{م}+1} = 0$$

چونکہ $\text{مف طہ}_{\text{م}+1}$، $\text{مف طہ}_{\text{م}+2}$، ....، $\text{مف طہ}_{\text{ن}}$ سب کے سب اختیاری ہیں اس لیے ہم لے سکتے ہیں

$$\text{مف طہ}_{\text{م}+1} = \text{صہ}،\ \text{مف طہ}_{\text{م}+2} = \text{مف طہ}_{\text{م}+3} = \dots = \text{مف طہ}_{\text{ن}} = 0$$

اور حاصل کر سکتے ہیں

$$\frac{\text{فر}}{\text{فزت}}\left(\frac{\text{جف ل}}{\text{جف طہ}_{\text{م}+1}}\right) - \frac{\text{جف ل}}{\text{جف طہ}_{\text{م}+1}} + \text{لہ ا}_{\text{م}+1} + \text{مہ ب}_{\text{م}+1} + \dots = 0$$

اسی طرح ہم م + ا سے ن تک تمام لاحقوں کے لیے وہی مساوات حاصل کر سکتے ہیں لیکن یہ مساوات لاحقوں ا تا م کے لیے درست فرض کیجا چکی ہے (مقابلہ کرو مساواتوں (۱۷۰)،....(۱۷۱)]-
پس مساواتوں کا حسب ذیل مکمل نظام حاصل ہوتا ہے:

$$\frac{\text{ف}}{\text{فزت}}\left(\frac{\text{جف ل}}{\text{جف طہ}_1}\right) - \frac{\text{جف ل}}{\text{جف طہ}_1} + \text{لہ ا}_1 + \text{مہ ب}_1 + \dots = 0,$$

....

$$\frac{\text{ف}}{\text{فزت}}\left(\frac{\text{جف ل}}{\text{جف طہ}_{\text{ن}}}\right) - \frac{\text{جف ل}}{\text{جف طہ}_{\text{ن}}} + \text{لہ ا}_{\text{ن}} + \text{مہ ب}_{\text{ن}} + \dots = 0.$$

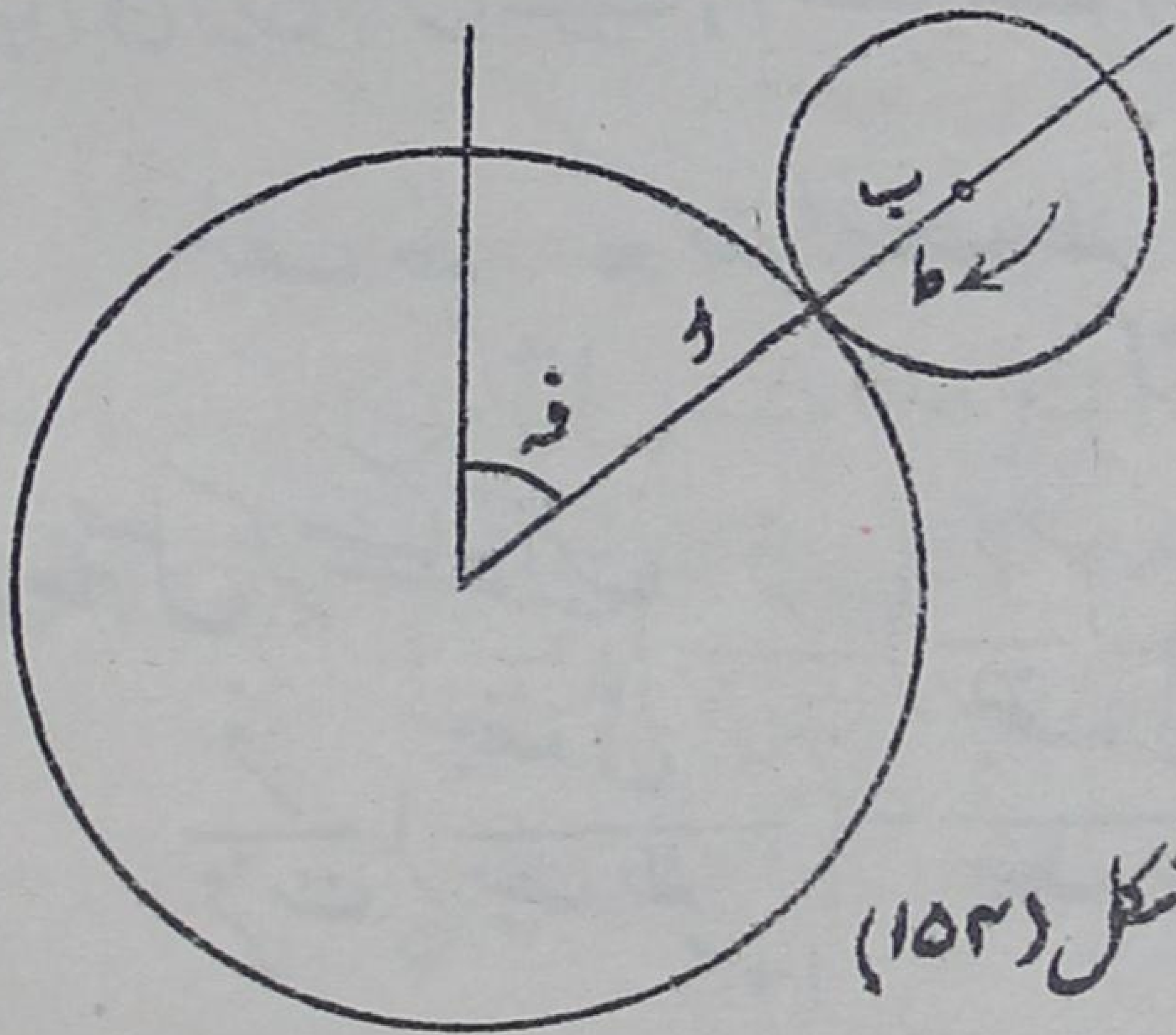
جس میں لاحقے ا تا ن ہیں - ان ن مساواتوں سے م غیر معین ضاربوں لہ، مہ، .... کو ساقط کیا جائے تو ن - م مساواتیں باقی رہتی ہیں جن سے محددوں کی تبدیلیاں معلوم کی جا سکتی ہیں -

(۳۳۶)

توضیحی مثالیں

۱- نصف قطر ا کا ایک متجانس کرہ، نصف قطر ب کے ایک ثابت کرہ کی بیرونی سطح پر بغیر پھسلے لڑھکتا ہے - حرکت معلوم کرو -

فرض کرو کہ کسی لمحہ پر مرکزوں کا خط سمت انتصابی سے زاویہ کہ بناتا ہے اور فرض کرو کہ متحرک کرہ کی زاوئی رفتار طہ ہے - متحرک کرہ کے مرکز کی رفتار (ا + ب) کہ ہے اور اس لیے



$$\text{ت} = \tfrac{1}{2}\text{ک}\left[(\text{ا} + \text{ب})^2\,\text{کہ}^2 + \tfrac{2}{5}\,\text{ا}^2\,\text{طہ}^2\right]$$

اور توانائی بالقوہ ہے

$$\text{ہ} = \text{ک ج (ا + ب) جم کہ}$$

اس لیے $\text{ل} = \text{ت} - \text{ہ}$

شکل (۱۵۴)

= ½ ک (ا + ب)² کہ² + ⅕ ک ا² طہ² − ک ج (ا + ب) جم کہ (ا)

طہ اور کہ میں تغیرات اختیاری نہیں ہیں اور ہم انہیں جو چاہیں قیمتیں نہیں دے سکتے کیونکہ متحرک کرہ کے مرکز کی رفتار (ا + ب) کہ ہے اور نیز ا طہ ہونی چاہیے کیونکہ کرہ زاوئی رفتار طہ سے بغیر پھسلے لڑھک رہا ہے۔ اس لیے

ا طہ = (ا + ب) کہ　　　(ب)

یہ رشتہ ہر ممکن حرکت کے ہر لمحہ پر درست رہتا ہے اور اس لئے وقت کے لحاظ سے تکمل کرنے پر حاصل ہوتا چاہیے

ا طہ = (ا + ب) کہ + مستقل

اور اس لیے ہمیں فرض کرنا چاہیے کہ محدود طہ، کہ کی تبدیلیاں رشتہ

ا مف طہ = (ا + ب) مف کہ

کے ذریعہ مربوط ہیں۔

اس طرح لگرانج کی مساواتیں ہیں

فر/فرت (جف ل/جف طہ) − جف ل/جف طہ + لہ ا = ۰،

فر/فرت (جف ل/جف کہ) − جف ل/جف کہ − لہ (ا + ب) = ۰

لہ کو ساقط کرنے پر حاصل ہوتا ہے

(ا + ب) [فر/فرت (جف ل/جف طہ) − جف ل/جف طہ] + ا [فر/فرت (جف ل/جف کہ) − جف ل/جف کہ] = ۰

مساوات (ا) سے اندراج کرنے پر یہ مساوات ہو جاتی ہے

(ا + ب) [فر/فرت (⅖ ک ا² طہ)] + ا [فر/فرت {ک (ا + ب)² کہ}

− ک ج (ا + ب) جب کہ] = ۰

ا ط کی بجائے (ا + ب) کہ رکھنے کے بعد حاصل ہوتا ہے

۷/۵ ک ا (ا + ب)^۲ فز^۲ کہ / فرت^۲ = ک ج ا (ا + ب) جب کہ

یا

(ا + ب) فز^۲ کہ / فرت^۲ = ۵/۷ ج جب کہ

اس سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ متحرک کرہ کا مرکز اُس اسراع کے ۵/۷ اسراع کے ساتھ حرکت کرتا ہے جو ایک چکنے ذرہ کا ہوگا اگر یہ ذرہ نصف قطر ا + ب کے ایک کُرہ پر نیچے پھسلے۔

یہی نتیجہ ط کو مساواتوں (ا) اور (ب) سے ساقط کرنے اور پھر کہ کو ایک واحد لگرانج کا مجدد سمجھنے سے حاصل ہو سکتا ہے۔

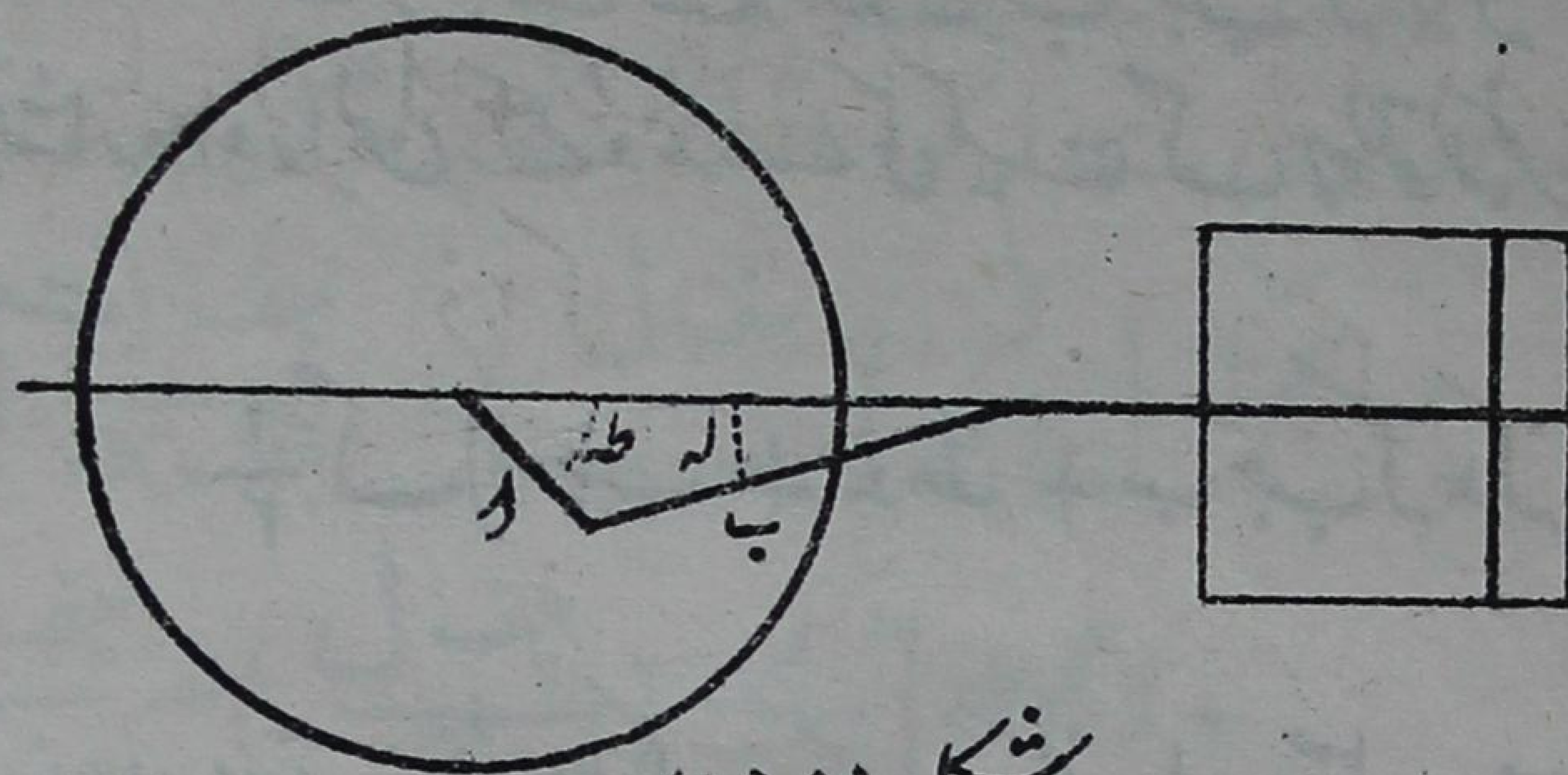
۲ — ایک اڑ پہیہ ایک فشارے سے جو ایک افقی اُسطوانے میں حرکت کرتا ہے ایک کرنیک اور ڈنڈے کے ذریعہ مربوط ہے۔ جب انجن میں بھاپ نہیں ہوتی تو اڑ پہیہ اپنے توازن کے محل میں ساکن رہتا ہے۔ اس کی حرکت جبکہ وہ ہٹا ہوا ہو معلوم کرو۔

فرض کرو کہ کرنیک اور ڈنڈے کے طول ا، ب ہیں اور ط، کہ وہ زاویے ہیں جو وہ اڑ پہیہ کے کسی محل میں سمت افقی سے بناتے ہیں۔ جب انجن کا محل پوری طرح معلوم ہوتا ہے جبکہ ط اور کہ معلوم ہوں۔ ط اور کہ کی قیمتوں سے انجن کا محل معلوم ہوتا ہے لیکن اگر ہم ط اور لہ کو اختیاری قیمتیں دیں تو انجن کا ممکن محل حاصل ہونا ضروری نہیں ہے۔

اڑ پہیہ، محور اور کرنیک کی گردش کی رفتار طہ ہے اور اس لیے اس حرکت کی توانائی بالحرکت ½ ع طہ^۲ ہے جہاں ع اڑ پہیہ کے محور کے گرد انجن کے اس حصہ کا جمود کا معیار ہے۔ اگر ہم ڈنڈے کے مرکز ثقل کو اس کے وسطی نقطہ پر فرض کریں تو مرکز ثقل کے مجددجن کی پیمائش اڑ پہیہ کے محور سے ہوئی ہو حسب ذیل ہیں:

افقی: ا جم ط + ½ ب جم کہ

انتصابی : $\frac{1}{2}$ ب جب کہ



شکل (۱۵۵)

اس طرح ڈنڈے کے مرکز ثقل کی رفتار کے اجزائے ترکیبی ہیں :

(۳۳۸) افقاً — (ا جب طہ × طہ + $\frac{1}{2}$ ب جب کہ × کہ)

انتصاباً $\frac{1}{2}$ ب جم کہ × کہ

اس لئے ڈنڈے کے مرکز ثقل کی پوری رفتار و،

و^{2} = (ا جب طہ × طہ + $\frac{1}{2}$ ب جب کہ × کہ)^{2} + ($\frac{1}{2}$ ب جم کہ × کہ)^{2}

= ا^{2} جب^{2} طہ × طہ^{2} + ا ب جب طہ جب کہ × طہ کہ + $\frac{1}{4}$ ب^{2} کہ^{2}

سے حاصل ہوگی۔ ڈنڈے کی زاوئی رفتار کہ ہے اور اس کے گھماؤ کا نصف قطر گ،

گ^{2} = $\frac{1}{3}$ (ب/۲)^{2} = $\frac{1}{12}$ ب^{2}

سے حاصل ہوگا۔

پس اگر ڈنڈے کی کمیت ک ہے تو اس کی توانائی بالحرکت

$\frac{1}{2}$ ک (و^{2} + گ^{2} کہ^{2})

= $\frac{1}{2}$ ک (ا^{2} جب^{2} طہ × طہ^{2} + ا ب جب طہ جب کہ × کہ طہ

+ $\frac{1}{3}$ ب^{2} کہ^{2})

ہے۔

بالآخر، اڑپہیہ کے مرکز سے قشاری ڈنڈے کے سرے کا افقی فاصلہ

ا جم طہ + ب جم کہ ہے اور اِس لیے فشارہ اور فشاری ڈنڈے کی رفتار ہے

- ا جب طہ × طہٗ - ب جب کہ × کہٗ

اگر فشارہ اور اِس کے ڈنڈے کی کمیت گ ہو تو انجن کے اِس حصہ کی توانائی بالحرکت

$\frac{1}{2}$ گ (ا جب طہ × طہٗ + ب جب کہ × کہٗ)^2

ہے۔

اب پوری توانائی بالحرکت ت کے لیے حاصل ہوتا ہے

۲ ت = ع طہٗ^{2} + ک (ا^2 جب^2 طہ × طہٗ^{2} + ا ب جب طہ جب کہ × کہٗ طہٗ + $\frac{1}{3}$ ب^2 کہٗ^{2}) + گ (ا جب طہ × طہٗ + ب جب کہ × کہٗ)^2

(ا)

توانائی بالقوہ مہ جس کی پیمائش معیاری تشکیل طہ = کہ = ۰ سے ہوئی ہو

مہ = -کَ ج ہ جب (طہ + صہ) - $\frac{1}{2}$ ک ج ب جب کہ ، (ب)

ہے جہاں کَ اڑ پہیہ اور کرنیک کی کل کمیت ہے اور اِس کے مرکز ثقل کے قطبی محدد ہ ، صہ ہیں جبکہ طہ = ۰۔

طہ اور کہ کی تبدیلیاں غیر تابع نہیں ہیں۔ شکل پر سرسری نظر ڈالنے سے یہ معلوم ہوگا کہ رشتہ

ا جب طہ = ب جب کہ (ج)

ہمیشہ قائم رہنا چاہئے اور اِس کو تفرق کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ اگر طہ اور کہ کو تعمیمی محددوں کے طور پر لیا جائے تو ہمیں فرض کرنا چاہئے کہ وہ رشتہ

ا جم طہ مف طہ - ب جم کہ مف کہ = ۰

کے ذریعہ مربوط ہیں۔

اِس طرح لگرانج کی مساواتیں ہونگی :

$\frac{ف}{ف ت}\left(\frac{جف ل}{جف طہٗ}\right) - \frac{جف ل}{جف طہ} + لہ ا جم طہ = ۰$ (د)

$$\frac{فر}{فرت}\left(\frac{جف\ ل}{جف\ کہ}\right) - \frac{جف\ ل}{جف\ کہ} - لہ\ ب\ جم\ کہ = ۰ \qquad (ع)$$

(۴۳۹) اِن مساواتوں سے لہ کو ساقط کرنے پر حاصل ہوتا ہے :

$$ب\ جم\ کہ \left[\frac{فر}{فرت}\left(\frac{جف\ ل}{جف\ طہ}\right) - \frac{جف\ ل}{جف\ طہ}\right]$$

$$+ ا\ جم\ طہ \left[\frac{فر}{فرت}\left(\frac{جف\ ل}{جف\ کہ}\right) - \frac{جف\ ل}{جف\ کہ}\right] = ۰$$

اور ل کی بجائے مساواتوں (ا) اور (ب) سے اس کی قیمت درج کرنے سے یہ مساوات طہ اور کہ کے اور ان کے تفرقی سروں (بلحاظ وقت) کے درمیان ایک مساوات ہو جاتی ہے۔ اِس مساوات اور ہندسی ربط (ج)

$$ا\ جب\ طہ = ب\ جب\ کہ \qquad (ف)$$

سے ہم طہ اور کہ کو وقت کی رقوم میں معلوم کر سکتے ہیں۔

مساوات (ف) استعمال کر کے ہم مساوات (ب) کو

$$م = - ک\ ج\ ھ\ جب\ (طہ + صہ) - \frac{۱}{۲}\ ک\ ج\ ا\ جب\ طہ$$

میں تبدیل کر سکتے ہیں۔

اڑ پہیہ پر مناسب اوزان کو اِس طریقہ پر رکھا جا سکتا ہے کہ

$$صہ = ۰،\ ک\ ھ + \frac{۱}{۲}\ ک\ ا = ۰$$

اور اگر ایسا ہو جائے تو مرکز ثقل ہمیشہ ایک ہی ارتفاع پر رہے گا۔ اسے انجن کو متوازن کرنا کہتے ہیں۔

اگر ہم یہ فرض کر لیں کہ انجن کو اِس طریقہ پر متوازن کیا جا چکا ہے تو م = ۰ اور اس لیے ل = ت۔ لیکن ہم لگرانج کی مساواتیں استعمال کئے بغیر حرکت کو آسانی سے معلوم کر سکتے ہیں کیونکہ ہم جانتے ہیں کہ ت کو کل حرکت کی اثناء میں مستقل رہنا چاہئے اور مساوات (ف) کے تفرق سے حاصل ہوتا ہے

$$ا\ جم\ طہ \times \dot{طہ} = ب\ جم\ کہ \times \dot{کہ}$$

اور اس لیے ہم مساوات (۱) کی بجائے رکھ سکتے ہیں

۲ ت = ع طہ² + ک (۱² جب² طہ × طہ² + ۱² جب طہ جم طہ مس کہ × طہ²

+ ½ ۱² جم² طہ قط² کہ × طہ²) + ک (۱ جب طہ × طہ + ۱ جم طہ مس کہ × طہ)²

= طہ² [ع + ک ۱² جب طہ جب (طہ + کہ) قط کہ + ½ ک ۱² جم² طہ قط² کہ

+ ک ۱² جب² (طہ + کہ) قط² کہ]

یہ کُل حرکت میں مستقل ہے لیکن ہم دیکھتے ہیں کہ اس سے یہ نتیجہ نہیں نکلتا کہ طہ مستقل ہے۔ پس اگرچہ انجن کو اس طریقہ پر متوازن کیا گیا ہو کہ وہ کسی محل میں ساکن رہ سکے تاہم اُس کا یکساں حرکت کرنا ضروری نہیں ہے اگر اُسے حرکت میں لایا جائے۔

غیر بقائی نظامات کے لیے لگرانج کی مساواتیں

۲۷۳ — غیر بقائی نظاموں کے لیے دفعہ (۲۶۸) میں بتایا جا چکا ہے کہ مساوات (۱۵۶)

$$\int_{ت_۱}^{ت_۲} \text{مف ل فرت} = ۰ \qquad (۱۷۲)$$

کی بجائے مساوات

$$\int_{ت_۱}^{ت_۲} [\text{مف ت} + \Sigma (\text{لا مف لا} + \text{ما مف ما}$$

$$+ \text{ے مف ی})] \text{فرت} = ۰ \qquad (۱۷۳)$$

رکھی جانی چاہیے۔

(۳۴۰)

اب چونکہ حسب مساوات (۱۵۸)

لا = ف (طہ۱، طہ۲، ....، طہن)

اس لیے ہمیں حاصل ہونا چاہیے

مف لا = لاَ − لا

= ف (طہ$_1$ + مف طہ$_1$ + طہ$_2$ + مف طہ$_2$ + ...) − ف (طہ$_1$، طہ$_2$ ...)

= (جف ف / جف طہ$_1$) مف طہ$_1$ + (جف ف / جف طہ$_2$) مف طہ$_2$ + ...

جہاں دوسرے رتبہ کی چھوٹی مقداریں نظرانداز کی گئی ہیں۔

اِس طرح

Σ (لا مف لا + ما مف ما + ے مف ی) = طا$_1$ مف طہ$_1$

+ طا$_2$ مف طہ$_2$ + ... طا$_ن$ مف طہ$_ن$

جہاں طا$_1$، طا$_2$، ... طا$_ن$ نظام کی تشکیل پر منحصر ہیں اور اس لیے وہ صرف طہ$_1$، طہ$_2$، ... طہ$_ن$ کے تفاعل ہیں۔

مساوات (۱۷۳) اب ہو جاتی ہے

∫ ت$_1$ تا ت$_2$ مف ت فرت + ∫ ت$_1$ تا ت$_2$ (طا$_1$ مف طہ$_1$ + طا$_2$ مف طہ$_2$

+ ..... + طا$_ن$ مف طہ$_ن$) فرت = ۰ (۱۷۴)

جس طرح دفعہ (۲۷۰) میں ہم نے معلوم کیا تھا کہ

∫ ت$_1$ تا ت$_2$ مف ل فرت

کو ∫ ت$_1$ تا ت$_2$ {Σ$^{ن}_{1}$ مف طہ$_1$ [جف ل / جف طہ$_1$ − فر/فرت (جف ل / جف طہ̇$_1$)]} فرت

میں مستحیل کیا جا سکتا ہے عین اُسی طرح مساوات (۱۷۴) کی پہلی رقم کو

∫ ت$_1$ تا ت$_2$ {Σ$^{ن}_{1}$ مف طہ$_1$ [جف ت / جف طہ$_1$ − فر/فرت (جف ت / جف طہ̇$_1$)]} فرت

میں مستحیل کیا جا سکتا ہے۔ اِس کو درج کرنے سے مساوات ہو جاتی ہے

$$\text{ت}\left\{\sum_{\text{ن}}^{\text{ا}}\text{مف ط}_{\text{ا}}\left[\frac{\text{جف ت}}{\text{جف ط}_{\text{ا}}}-\frac{\text{فر}}{\text{فرت}}\left(\frac{\text{جف ت}}{\text{جف ط}_{\text{ا}}^{\cdot}}\right)+\text{ط}_{\text{ا}}\right]\right\}\text{فرت}=0 \quad (۱۶۴)$$

اب چونکہ یہ وقت کی تمام ممکن سعتوں کے لیے درست ہے اِس لیے ہر لمحہ پر حاصل ہونا چاہئے

$$\sum_{\text{ا}}^{\text{ن}}\text{مف ط}_{\text{ا}}\left[\frac{\text{جف ت}}{\text{جف ط}_{\text{ا}}}-\frac{\text{فر}}{\text{فرت}}\left(\frac{\text{جف ت}}{\text{جف ط}_{\text{ا}}^{\cdot}}\right)+\text{ط}_{\text{ا}}\right]=0 \quad (۱۶۵)$$

اگر مختلف ط بغیر کسی قید کے متغیر ہو سکتے ہیں یعنے اگر مف ط$_{۱}$، مف ط$_{۲}$، ... ، مف ط$_{\text{ن}}$ کو ہم جو چاہیں قیمتیں دے سکیں تو ہر سر کو معدوم ہونا چاہئے اور اِس صورت میں مساواتوں کا نظام ہوگا

$$\frac{\text{فر}}{\text{فرت}}\left(\frac{\text{جف ت}}{\text{جف ط}_{\text{ا}}^{\cdot}}\right)-\frac{\text{جف ت}}{\text{جف ط}_{\text{ا}}}-\text{ط}_{\text{ا}}=0 \quad (۱۶۶)$$

....

لیکن اگر مف ط$_{۱}$، مف ط$_{۲}$، ... مف ط$_{\text{ن}}$ اُن قیود کے پابند ہوں جو مساواتوں (۱۶۶)، (۱۶۷)، ... میں ظاہر کئے گئے ہیں تو حسب دفعہ ۲۷۲ ہم معلوم کرتے ہیں کہ مساواتوں کے اِس نظام کی بجائے نظام

$$\frac{\text{فر}}{\text{فرت}}\left(\frac{\text{جف ت}}{\text{جف ط}_{\text{ا}}^{\cdot}}\right)-\frac{\text{جف ت}}{\text{جف ط}_{\text{ا}}}-\text{ط}_{\text{ا}}+\text{ل ا}_{\text{ا}}+\text{م ب}_{\text{ا}}+\dots=0 \quad (۱۶۷)$$

....

کو رکھنا چاہئے۔

۲۷۴ — مساواتوں کے یہ نظام اُن نظاموں میں تحویل ہوتے ہیں جو بقائی قوتوں کی خاص صورت میں قبل ازیں حاصل کئے جا چکے ہیں۔ کیونکہ اِس صورت میں اُس کام پر غور کرو جو ایک خفیف ہٹاؤ میں جس میں صرف ط$_{\text{ا}}$ بدلکر ط$_{\text{ا}}$ + مف ط$_{\text{ا}}$ ہو جاتا ہے انجام پاتا ہے۔ یہ کام ط$_{\text{ا}}$ مف ط$_{\text{ا}}$ اور نیز وہ $-\frac{\text{جف ہ}}{\text{جف ط}_{\text{ا}}}$ مف ط$_{\text{ا}}$ ہے اور اِس لیے

$$\text{ط}_1 = -\frac{\text{جف م}}{\text{جف ط}_1}$$

اِس طرح

$$\frac{\text{جف ل}}{\text{جف ط}_1} = \frac{\text{جف ک}}{\text{جف ط}_1} - \frac{\text{جف ت}}{\text{جف ط}_1} = \text{ط}_1 + \frac{\text{جف ت}}{\text{جف ط}_1}$$

اور

$$\frac{\text{جف ل}}{\text{جف ط}_1} = \frac{\text{جف (ل + م)}}{\text{جف ط}_1} = \frac{\text{جف ت}}{\text{جف ط}_1}$$

کیونکہ م میں ط_1 شامل نہیں ہوتا ۔ اِس طرح مساوات (۱۷۵) حسب سابق

$$\frac{\text{ف}}{\text{فزت}}\left(\frac{\text{جف ل}}{\text{جف ط}_1}\right) - \frac{\text{جف ل}}{\text{جف ط}_1} = ۰$$

میں تحویل ہوتی ہے اور اسی طریقہ پر مساواتیں (۱۷۷) ...، اُن مساواتوں میں مستحیل ہوسکتی ہیں جو دفعہ ۲۷۲ میں حاصل ہو چکی ہیں ۔

لگرانج کی مساواتوں کو راست استحالہ سے حاصل کرنا (۳۴۲)

۲۷۵ ـ لگرانج کی مساواتوں کو مساوات (۱۵۶) سے اخذ کرنے کی بجائے انہیں حرکت کی مساواتوں کے استحالہ سے راست حاصل کیا جاسکتا ہے ۔

حسب سابق

$$\text{لا} = \text{ف}\,(\text{ط}_1، \text{ط}_2، ....، \text{ط}_n)$$

اور اِس لیے تفرق کرنے پر

$$\frac{\text{فرلا}}{\text{فزت}} = \frac{\text{جف ف}}{\text{جف ط}_1}\,\frac{\text{فرط}_1}{\text{فزت}} + \frac{\text{جف ف}}{\text{جف ط}_2}\,\frac{\text{فرط}_2}{\text{فزت}} + ...$$

یا

$$\dot{\text{لا}} = \frac{\text{جف لا}}{\text{جف ط}_1}\,\dot{\text{ط}}_1 + \frac{\text{جف لا}}{\text{جف ط}_2}\,\dot{\text{ط}}_2 + ... \qquad (۱۷۸)$$

اِس طرح $\dot{\text{لا}}$ ، ایک خطی تفاعل ہے $\dot{\text{ط}}_1$، $\dot{\text{ط}}_2$، $\dot{\text{ط}}_3$ ... کا اور

$$\frac{\text{جف لاْ}}{\text{جف طہ}_{۱}} = \frac{\text{جف لا}}{\text{جف طہ}_{۱}} \qquad (۱۷۹)$$

نیز چونکہ

$$\text{ت} = \frac{۱}{۲}\, \Sigma\, \text{ک} \left(\text{لاْ}^{۲} + \text{ماْ}^{۲} + \text{یْ}^{۲}\right)$$

اس لیے ت حسب سابق طہ$_{۱}$، طہ$_{۲}$ ... کا ایک دو درجی تفاعل ہے جس میں طہ$_{۱}$، طہ$_{۲}$ ... بھی شامل ہیں۔ تفرق سے

$$\frac{\text{جف ت}}{\text{جف طہ}_{۱}} = \Sigma\, \text{ک} \left(\text{لاْ} \frac{\text{جف لاْ}}{\text{جف طہ}_{۱}} + \text{ماْ} \frac{\text{جف ماْ}}{\text{جف طہ}_{۱}} + \text{یْ} \frac{\text{جف یْ}}{\text{جف طہ}_{۱}}\right)$$

یا مساوات (۱۷۹) سے

$$\frac{\text{جف ت}}{\text{جف طہ}_{۱}} = \Sigma\, \text{ک} \left(\text{لاْ} \frac{\text{جف لا}}{\text{جف طہ}_{۱}} + \text{ماْ} \frac{\text{جف ما}}{\text{جف طہ}_{۱}} + \text{یْ} \frac{\text{جف ی}}{\text{جف طہ}_{۱}}\right)$$

اس طرح

$$\frac{\text{فر}}{\text{فزت}}\left(\frac{\text{جف ت}}{\text{جف طہ}_{۱}}\right) = \Sigma\, \text{ک} \left(\frac{\text{فر}^{۲}\text{لا}}{\text{فزت}^{۲}} \frac{\text{جف لا}}{\text{جف طہ}_{۱}} + \frac{\text{فر}^{۲}\text{ما}}{\text{فزت}^{۲}} \frac{\text{جف ما}}{\text{جف طہ}_{۱}} + \frac{\text{فر}^{۲}\text{ی}}{\text{فزت}^{۲}} \frac{\text{جف ی}}{\text{جف طہ}_{۱}}\right)$$

$$+ \Sigma\, \text{ک} \left[\text{لاْ} \frac{\text{فر}}{\text{فزت}}\left(\frac{\text{جف لا}}{\text{جف طہ}_{۱}}\right) + \text{ماْ} \frac{\text{فر}}{\text{فزت}}\left(\frac{\text{جف ما}}{\text{جف طہ}_{۱}}\right) + \text{یْ} \frac{\text{فر}}{\text{فزت}}\left(\frac{\text{جف ی}}{\text{جف طہ}_{۱}}\right)\right] \ldots\ldots (۱۸۰)$$

چونکہ $\frac{\text{جف لا}}{\text{جف طہ}_{۱}}$ ایک تفاعل ہے طہ$_{۱}$، طہ$_{۲}$ ... کا اس لیے

$$\frac{\text{فر}}{\text{فزت}}\left(\frac{\text{جف لا}}{\text{جف طہ}_{۱}}\right) = \frac{\text{جف}^{۲}\,\text{لا}}{\text{جف طہ}_{۱}^{۲}} \frac{\text{فرطہ}_{۱}}{\text{فزت}} + \frac{\text{جف}^{۲}\,\text{لا}}{\text{جف طہ}_{۱}\,\text{جف طہ}_{۲}} \frac{\text{فرطہ}_{۲}}{\text{فزت}} + \ldots\ldots (۱۸۱)$$

لیکن مساوات (۱۷۸) کے تفرق سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{جف لاٗ}}{\text{جف طہ}_1} = \frac{\text{جف}^2\,\text{لا}}{\text{جف طہ}_1^2}\,\text{طہ}_1 + \frac{\text{جف}^2\,\text{لا}}{\text{جف طہ}_1\,\text{جف طہ}_2}\,\text{طہ}_2 + \dots \quad (۱۸۲)$$

مساواتوں (۱۸۱) اور (۱۸۲) کے بائیں جانبی ارکان مماثل ہیں، اس لیے

$$\frac{\text{فر}}{\text{فرت}}\left(\frac{\text{جف لا}}{\text{جف طہ}_1}\right) = \frac{\text{جف لاٗ}}{\text{جف طہ}_1}$$

اور مساوات (۱۸۰) کی آخری سطر

$$\Sigma\,\text{ک}\left(\text{لاٗ}\,\frac{\text{جف لاٗ}}{\text{جف طہ}_1} + \text{ماٗ}\,\frac{\text{جف ماٗ}}{\text{جف طہ}_1} + \text{یٗ}\,\frac{\text{جف یٗ}}{\text{جف طہ}_1}\right)$$

میں تحویل ہوتی ہے اور اس کی قیمت

$$\frac{\text{جف}}{\text{جف طہ}_1}\,\Sigma\,\text{ک}\left[\tfrac{1}{2}\left(\text{لاٗ}^2 + \text{ماٗ}^2 + \text{یٗ}^2\right)\right]$$

ہے یا

$$\frac{\text{جف ت}}{\text{جف طہ}_1}$$

اب مساوات (۱۸۰) ہو جاتی ہے

$$\frac{\text{فر}}{\text{فرت}}\left(\frac{\text{جف ت}}{\text{جف طہ}_1}\right) - \frac{\text{جف ت}}{\text{جف طہ}_1}$$

$$= \Sigma\,\text{ک}\left(\frac{\text{فر}^2\,\text{لا}}{\text{فرت}^2}\,\frac{\text{جف لا}}{\text{جف طہ}_1} + \frac{\text{فر}^2\,\text{ما}}{\text{فرت}^2}\,\frac{\text{جف ما}}{\text{جف طہ}_1}\right.$$

$$\left. + \frac{\text{فر}^2\,\text{ی}}{\text{فرت}^2}\,\frac{\text{جف ی}}{\text{جف طہ}_1}\right)$$

لیکن حرکت کی مساواتوں سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{لا} = \Sigma\,\text{ک}\,\frac{\text{فر}^2\,\text{لا}}{\text{فرت}^2}\text{، وغیرہ}$$

اِس لیے مساوات مندرجۂ بالا ہو جاتی ہے

$$\frac{\text{فر}}{\text{فرت}}\left(\frac{\text{جف ت}}{\text{جف طہ}_1'}\right) - \frac{\text{جف ت}}{\text{جف طہ}_1} = \Sigma\left(\text{لا}\,\frac{\text{جف لا}}{\text{جف طہ}_1} + \text{ما}\,\frac{\text{جف ما}}{\text{جف طہ}_1} + \text{ے}\,\frac{\text{جف ی}}{\text{جف طہ}_1}\right)$$

(۳۴۴) اگر ہم نظام میں ایک چھوٹا ہٹاؤ پیدا کریں جس میں طہ_1 بڑھکر $\text{طہ}_1 + \text{مف طہ}_1$، طہ_2 بڑھکر $\text{طہ}_2 + \text{مف طہ}_2$، طہ_3 بڑھکر $\text{طہ}_3 + \text{مف طہ}_3$ وغیرہ ہو جائے تو انجام پائے ہوئے کام کے لیے جو دو مختلف جملے حاصل ہوتے ہیں اِن کو ایک دوسرے کے مساوی رکھنے سے حاصل ہوتا ہے:

$$\text{طا}_1\,\text{مف طہ}_1 + \text{طا}_2\,\text{مف طہ}_2 + \ldots\ldots$$
$$= \Sigma(\text{لا مف لا} + \text{ما مف ما} + \text{ے مف ی})$$

صفحہ (۴۹۰) میں مف لا کی جو قیمت حاصل ہوئی ہے اِس کا اندراج کرنے سے یہ مساوات ہو جاتی ہے

$$\text{طا}_1\,\text{مف طہ}_1 + \text{طا}_2\,\text{مف طہ}_2 + \ldots\ldots\ldots$$
$$= \Sigma\left[\text{لا}\left(\frac{\text{جف لا}}{\text{جف طہ}_1}\text{مف طہ}_1 + \frac{\text{جف لا}}{\text{جف طہ}_2}\text{مف طہ}_2 + \ldots\right) + \text{ما}(\ldots\ldots) + \text{ے}(\ldots\ldots)\right]$$
$$= \text{مف طہ}_1\,\Sigma\left(\text{لا}\,\frac{\text{جف لا}}{\text{جف طہ}_1} + \text{ما}\,\frac{\text{جف ما}}{\text{جف طہ}_1} + \text{ے}\,\frac{\text{جف ی}}{\text{جف طہ}_1}\right) + \text{مف طہ}_2\,\Sigma(\ldots\ldots) + \ldots\ldots$$
$$= \text{مف طہ}_1\left[\frac{\text{فر}}{\text{فرت}}\left(\frac{\text{جف ت}}{\text{جف طہ}_1'}\right) - \frac{\text{جف ت}}{\text{جف طہ}_1}\right] + \text{مف طہ}_2\left[\ldots\ldots\right] + \ldots\ldots$$

اور مساوات

$$\sum \text{مف طہ}\left[\frac{\text{ف}}{\text{فت}}\left(\frac{\text{جف ت}}{\text{جف طہ}_{۱}}\right)-\frac{\text{جف ت}}{\text{جف طہ}_{۱}}-\text{ط}_{۱}\right]=۰$$

میں تحویل ہوتی ہے ـــ

یہ مساوات وہی ہے جو (۵ء۱) ہے اور لگرانج کی مساواتوں کی مختلف شکلیں حسب سابق اخذ کی جا سکتی ہیں ـــ

دھکے والی قوتوں کے لیے لگرانج کی مساواتیں

۶ء۲ ـــ فرض کرو کہ دھکوں کا ایک نظام چھوٹے وقفہ $\text{ت} = \text{ت}_{۱}$ تا $\text{ت} = \text{ت}_{۲}$ عمل کرتا ہے ـ فرض کرو کہ $\text{طہ}_{۱}$، $\text{طہ}_{۲}$، $\text{طہ}_{۳}$، ... ، $\text{طہ}_{ن}$ غیر تابع محدد ہیں اور اس لیے لگرانج کی مساواتیں ہیں :

$$\frac{\text{ف}}{\text{فت}}\left(\frac{\text{جف ت}}{\text{جف طہ}_{۱}}\right)-\frac{\text{جف ت}}{\text{جف طہ}_{۱}}=\text{ط}_{۱}\text{، وغیرہ}$$

اگر ہم اس مساوات کو فرت سے ضرب دیں اور $\text{ت} = \text{ت}_{۱}$ سے $\text{ت} = \text{ت}_{۲}$ تک تکمل کریں تو

$$\int_{\text{ت}_{۱}}^{\text{ت}_{۲}}\frac{\text{ف}}{\text{فت}}\left(\frac{\text{جف ت}}{\text{جف طہ}_{۱}}\right)\text{فرت}-\int_{\text{ت}_{۱}}^{\text{ت}_{۲}}\frac{\text{جف ت}}{\text{جف طہ}_{۱}}\text{فرت}=\int_{\text{ت}_{۱}}^{\text{ت}_{۲}}\text{ط}_{۱}\text{فرت}$$

پہلی رقم کی قیمت ہے

$$\left(\frac{\text{جف ت}}{\text{جف طہ}_{۱}}\right)_{\text{ت}=\text{ت}_{۲}}-\left(\frac{\text{جف ت}}{\text{جف طہ}_{۱}}\right)_{\text{ت}=\text{ت}_{۱}}$$

اور جب وقفہ $\text{ت}_{۱}$ تا $\text{ت}_{۲}$ کو انتہائی چھوٹا کیا جاتا ہے تو جملہ بالا صرف اُس تبدیلی کی پیمائش کرتا ہے جو دھکے نے $\frac{\text{جف ت}}{\text{جف طہ}_{۱}}$ میں پیدا کی ہے ـــ (۵ء۳۴)

دوسری رقم $\int_{ت_1}^{ت_2} \frac{جف\ ت}{جف\ ط_1}$ فرت میں متکمل $\frac{جف\ ت}{جف\ ط_1}$ محدود ہے اور اس لیے جب وقت کے وقفہ کو لا انتہا چھوٹا فرض کیا جاتا ہے تو یہ رقم بھی وقت کے ساتھ معدوم ہو گی۔ اِس طرح مساوات ہو جاتی ہے:

$$\frac{جف\ ت}{جف\ ط_1} \text{ میں تبدیلی } = \int_{ت_1}^{ت_2} \text{طا فرت} \qquad (۱۸۳)$$

۲۷۷ — اگر ف معمولی قوت ہو جو وقفہ $ت_1$ تا $ت_2$ میں دہکے کی طرح عمل کرے تو ہم $\int_{ت_1}^{ت_2}$ ف فرت کو دہکہ کہتے ہیں۔ تعمیم شدہ محدد $ط_1$ کے جواب میں

$$\int_{ت_1}^{ت_2} \text{طا فرت}$$

کو تعمیم شدہ دہکہ کہا جاتا ہے۔ اِس طرح مساوات (۱۸۳) شکل

$$\frac{جف\ ت}{جف\ ط_1} \text{ میں تبدیلی } = \text{ تعمیم شدہ دہکہ}$$

میں حاصل ہوتی ہے۔

رشتہ

کسی ذرہ کے معیار حرکت میں تبدیلی = ذرہ پر دہکہ

کے ساتھ مساوات بالا کی مشابہت ہونے کی وجہ سے $\frac{جف\ ت}{جف\ ط_1}$ کو تعمیم شدہ معیار حرکت کہتے ہیں جو محدد $ط_1$ کے متناظر ہے۔ پس اصطلاحات "دہکہ" اور "معیار حرکت" کے اِن معنوں کے ساتھ رشتہ

معیار حرکت کی تبدیلی = دہکہ

تعمیم شدہ محددوں میں بھی درست ہے۔

جب ہمارے محدد لا، ما، ی ہوں جو فضاء میں ایک متحرک ذرہ کے محدد ہیں تو تعمیم شدہ معیار حرکت بلاشبہ معیار حرکت کے معمولی اجزائے ترکیبی کے مماثل ہو جائیں گے ۔ چنانچہ

$$\text{ت} = \frac{1}{2}\,\text{ک}\left(\dot{\text{لا}}^2 + \dot{\text{ما}}^2 + \dot{\text{ی}}^2\right)$$

اس لیے
$$\frac{\text{جف ت}}{\text{جف }\dot{\text{لا}}} = \text{ک }\dot{\text{لا}} \text{ ، وغیرہ}$$

استوار جسم کے لیے یولر کی مساواتیں

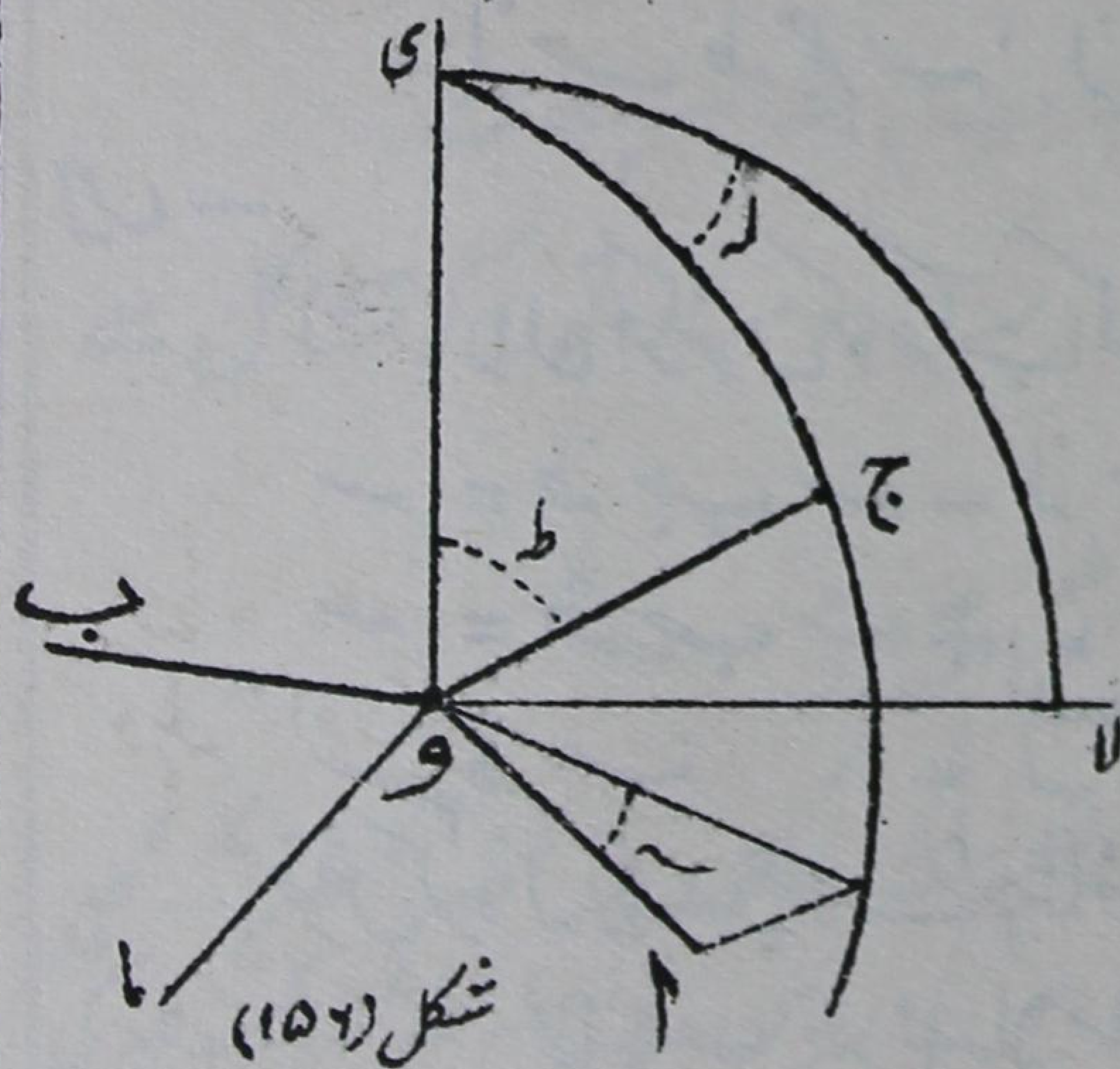
(۳۴۶)

۲۷۸ — یولر کی مساواتیں (دفعہ ۲۵۳) لگرانج کی مساواتوں سے اخذ کیجا سکتی ہیں ۔

فرض کرو کہ ایک اُستوار جسم ہے جس میں نقطہ و ثابت ہے اور نیز یہ نقطہ فضاء میں ثابت ہے یا وہ جسم کا مرکز ثقل ہے ۔ فرض کرو کہ اس اُستوار جسم کے معیار، نقطہ و پر کے جمود کے صدر محوروں کے گرد ا، ب، ج ہیں ۔ تب اگر ان محددوں کے گرد گردش کے اجزائے ترکیبی س_1، س_2، س_3 ہوں تو حسب دفعہ ۲۴۸ حاصل ہوتا ہے :

$$\text{ت} = \frac{1}{2}\left(\text{ا س}_1^2 + \text{ب س}_2^2 + \text{ج س}_3^2\right) \qquad (۱۸۴)$$

لگرانجی محددوں کے طور پر فرض کرو کہ جسم کے تیسرے محور و ج کے گردی قطبی محدد طہ، لہ ہیں اور ایک تیسرا محدد س جسم کے محور اول و ا اور اس مستوی کا درمیانی زاویہ ہے جو و ج اور محور طہ = ۰ میں سے گذرتا ہے یعنی مستوی ج و ی ۔



شکل (۱۵۶)

ہمیں اول سہ، سہ۱، سہ۲، سہ۳ کو طہ، لہ، سہ کی رقوم میں معلوم کرنا ہے تاکہ ۲ ت ت، ان محددوں کے تفاعل کے طور پر بیان ہو سکے۔ جسم کی حرکت دو حرکتوں سے مرکب ہے یعنے وہ حرکت جو مستوی ج وی کے لحاظ سے ہے اور وہ حرکت جو مستوی ج وی کی بلحاظ ثابت محوروں کے ہے۔ اول الذکر حرکت، وج کے گرد گردش سہ پر مشتمل ہے اور اگر اس کو محوروں و ا، وب، وج پر تحلیل کیا جائے تو اس کے اجزائے ترکیبی

۰، ۰، سہ

ہیں۔

مستوی ج وی کی حرکت دو گردشوں یعنے

(ا) گردش طہ جو مستوی ج وی کے علی القوائم محور کے گرد ہے،

(ب) گردش لہ جو محور طہ = ۰ کے گرد ہے

سے مرکب ہے۔

اگر ان گردشوں کو محاور و ا، وب، وج کی سمتوں میں تحلیل کیا جائے تو پہلے حصہ کے اجزائے ترکیبی

طہ جب سہ، طہ جم سہ، ۰

اور دوسرے کے اجزائے ترکیبی

- لہ جب طہ جم سہ، لہ جب طہ جب سہ، لہ جم طہ

ہیں۔

ان حرکتوں کو مرکب کرنے پر حاصل ہوتا ہے

سہ۱ = طہ جب سہ - لہ جب طہ جم سہ
سہ۲ = طہ جم سہ + لہ جب طہ جب سہ
سہ۳ = سہ + لہ جم طہ

(۱۸۵)

فرض کرو کہ ایک چھوٹے ہٹاؤ میں انجام پایا ہوا کام

طا مف طہ + لا مف لہ + سا مف سہ

(۳۴۷)

ہے ۔ تب محدد سا کے لیے لگرانج کی مساوات ہے:

جف / جف ت (جف ت / جف سہ) - جف ت / جف سہ = سا (۱۸۶)

مساوات (۱۸۴) کے تفرق سے حاصل ہوتا ہے:

جف ت / جف سہ = ا سہ۱ جف سہ۱ / جف سہ + ب سہ۲ جف سہ۲ / جف سہ + ج سہ۳ جف سہ۳ / جف سہ

= ج سہ۳ ، مساواتوں (۱۸۵) سے اندراج کرنے پر ۔

نیز

جف ت / جف سہ = ا سہ۱ جف سہ۱ / جف سہ + ب سہ۲ جف سہ۲ / جف سہ + ج سہ۳ جف سہ۳ / جف سہ

= ا سہ۱ (طہ جم سہ + نہ جب طہ جب سہ)

+ ب سہ۲ (- طہ جب سہ + نہ جب طہ جم سہ)

= (ا - ب) سہ۱ سہ۲

بالآخر سا مف سہ وہ کام ہے جو بیرونی قوتیں چھوٹی گردش مف سہ میں انجام دیتی ہیں اور اس لیے بموجب دفعہ (۱۲۱) سا محور و ج کے گرد ان قوتوں کے معیاروں کے مجموعہ ن کے مساوی ہے ۔

اِن تمام اندراجات کو عمل میں لانے پر مساوات (۱۸۶) ہو جاتی ہے: (۳۴۸)

ج فر سہ۳ / فر ت - (ا - ب) سہ۱ سہ۲ = ن

جو یولر کی تیسری مساوات ہے اور دوسری دو مساواتوں کو تشاکل سے حاصل کیا جا سکتا ہے ۔

چھوٹے اہتزاز

۲۷۹ ـــ فرض کرو کہ کسی نظام کے تعمیم شدہ محدد طہ۱ ، طہ۲ ، طہ۳ ... طہن ہیں اور فرض کرو کہ یہ تمام محدد غیر تابع ہیں اور اس لیے طہ۱ ، طہ۲ ، طہ۳ .... طہن کی

قیمتوں کے کسی جٹ سے نظام کی ایک ممکن تشکیل حاصل ہوتی ہے۔
فرض کرو کہ تشکیل

$$ط_۱ = \bar{ط}_۱ ،\ ط_۲ = \bar{ط}_۲ ، \ldots ،\ ط_ن = \bar{ط}_ن \qquad (۱۸۷)$$

توازن کی تشکیل ہے۔ اب اگر

$$ل_۱ = ط_۱ - \bar{ط}_۱ ،\ ل_۲ = ط_۲ - \bar{ط}_۲ ، \ldots ،\ ل_ن = ط_ن - \bar{ط}_ن$$

تو مقداروں $ل_۱$، $ل_۲$، ....، $ل_ن$ کو نظام کے تعمیم شدہ محددوں کے طور پر لیا جا سکتا ہے اور یہ محدد توازن کے محل میں سب کے سب معدوم ہونگے۔
فرض کرو کہ توازن کی تشکیل میں توانائی بالقوہ کی قیمت $ک_ب$ سے تعبیر کیگئی ہے۔ کسی دوسری تشکیل میں توانائی بالقوہ کے جملہ کو ٹیلر کے مسئلہ سے شکل

$$ک = ک_ب + ل_۱ \frac{جف\, ک}{جف\, ط_۱} + ل_۲ \frac{جف\, ک}{جف\, ط_۲} + \ldots + ل_ن \frac{جف\, ک}{جف\, ط_ن}$$
$$+ \frac{۱}{۲}\left(ل_۱^۲ \frac{جف^۲ ک}{جف\, ط_۱^۲} + ۲ ل_۱ ل_۲ \frac{جف^۲ ک}{جف\, ط_۱ جف\, ط_۲} + \ldots\right)$$
$$+ \ldots$$

میں پھیلایا جا سکتا ہے جہاں تمام تفرقی سروں کو توازن کے محل میں محسوب کیا گیا ہے۔ لیکن توازن کے اس محل میں دفعہ ۱۳۵ کے مسئلہ کی رو سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{جف\, ک}{جف\, ط_۱} = \frac{جف\, ک}{جف\, ط_۲} = \ldots = \frac{جف\, ک}{جف\, ط_ن} = ۰ \qquad (۳۴۹)$$

اس لیے ک کی قیمت کو شکل

$$ک = ک_ب + ا_{۱۱} ل_۱^۲ + ۲ ا_{۲۱} ل_۱ ل_۲ + \ldots + ا_{نن} ل_ن^۲$$

میں لکھا جا سکتا ہے جس میں $ل_۱$، $ل_۲$، ... کی وہ قوتیں جو دو سے بڑی ہیں

نظر انداز کر دی گئی ہیں کیونکہ ہم صرف اُن حرکتوں پر توجہ محدود رکھتے ہیں جن میں لہ، لہ، ... سب کے سب چھوٹی مقداریں ہیں۔

توانائی بالحرکت حسب سابق (دفعہ ۲۷۰) لہ، لہ، ... لہن کا ایک دو درجی تفاعل ہے۔ فرض کرو کہ

$$ت = ب_{۱۱} لہ_۱^۲ + ۲ ب_{۱۲} لہ_۱ لہ_۲ + ... + ب_{ن ن} لہ_ن^۲ \qquad (۱۸۹)$$

سر $ب_{۱۱}$، $ب_{۱۲}$، ...، $ب_{ن ن}$ فی الحقیقت $طہ_۱$، $طہ_۲$، ...، $طہ_ن$ کے تفاعلات ہیں لیکن ہم اِن کی قیمتوں کو اُن قیمتوں کے مساوی سمجھ سکتے ہیں جو توازن کی تشکیل میں حاصل ہوتی ہیں اور اِس لیے اِن کو مستقل مقداروں کے طور پر سمجھا جا سکتا ہے۔

۲۸۰ — اب ن متغیروں $لا_۱$، $لا_۲$، ...، $لا_ن$ کے دو درجی دو تفاعلوں پر غور کرو جو حسب ذیل ہیں:

$$ف (لا_۱، لا_۲، ....، لا_ن) = ا_{۱۱} لا_۱^۲ + ۲ ا_{۱۲} لا_۱ لا_۲ + ... + ا_{ن ن} لا_ن^۲،$$

$$ف (لا_۱، لا_۲، ....، لا_ن) = ب_{۱۱} لا_۱^۲ + ب_{۱۲} لا_۱ لا_۲ + ... + ب_{ن ن} لا_ن^۲$$

چونکہ تفاعل ت جس کی تعریف مساوات (۱۸۹) سے کی گئی ہے بالضرور مثبت ہے اِس لیے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ ف ($لا_۱$، $لا_۲$، ....، $لا_ن$) کو $لا_۱$، $لا_۲$، ....، $لا_ن$ کی تمام قیمتوں کے لیے مثبت ہونا چاہئے۔ پس جبر و مقابلہ کے ایک مشہور مسئلہ سے ہم حسب ذیل نمونے کا ایک استحالہ معلوم کر سکتے ہیں:

$$\left.\begin{aligned} لا_۱ &= کہ_{۱۱} ضا_۱ + کہ_{۱۲} ضا_۲ + ... + کہ_{۱ن} ضا_ن \\ لا_۲ &= کہ_{۲۱} ضا_۱ + کہ_{۲۲} ضا_۲ + ... + کہ_{۲ن} ضا_ن \end{aligned}\right\} \qquad (۱۹۰)$$

جس میں سرکہ وغیرہ حقیقی ہیں۔ یہ استحالہ ایسا ہے کہ ف اور ف حسب ذیل نمونے کے جملوں میں مستحیل ہوتے ہیں:

$$ف (لا_۱، لا_۲، ...، لا_ن) = عہ_۱ ضا_۱^۲ + عہ_۲ ضا_۲^۲ + ... + عہ_ن ضا_ن^۲،$$

$$ف (لا_۱، لا_۲، ...، لا_ن) = بہ_۱ ضا_۱^۲ + بہ_۲ ضا_۲^۲ + ... + بہ_ن ضا_ن^۲$$

اور تمام سربہ_۱، بہ_۲، ...، بہ_ن مثبت ہوں گے۔ (۳۵۰)

اس مسئلہ کے جبریہ ثبوت علم التحلیل کے مقالات یا سامن کی ہائر الجبرا میں ملیں گے۔ یہ مسئلہ ایک ہندسی تعبیر پر جس میں متغیروں کی تعداد تین ہے غور کرنے سے فوراً سمجھ میں آجائے گا۔ متغیروں کو لا، ما، ی لینے سے مساواتیں

$$ف (لا، ما، ی) = ۱، ف (لا، ما، ی) = ۱ \quad (۱۹۱)$$

ہم مرکز دو درجیوں کی مساواتیں ہوں گی اور چونکہ لا، ما، ی کی تمام قیمتوں کے لیے ف مثبت ہے اس لیے دوسرا دو درجی ایک ناقص نما ہوگا۔ یہ معلوم ہے کہ اگر دو ہم مرکز دو درجیوں میں سے ایک ناقص نما ہو تو ایسے دو درجی باہم مزدوج وتروں کا ایک حقیقی جٹ مشترک رکھتے ہیں۔ اس نمونے کے استحالہ سے جس کو مساوات (۱۹۴) سے بیان کیا گیا ہے ہم محددوں کے محوروں کو ان وتروں پر منتقل کر سکتے ہیں اور تب دو درجیوں کی مساواتیں مطلوبہ اشکال

$$عہ_۱ ضا_۱^۲ + عہ_۲ ضا_۲^۲ + عہ_۳ ضا_۳^۲ = ۱، بہ_۱ ضا_۱^۲ + بہ_۲ ضا_۲^۲ + بہ_۳ ضا_۳^۲ = ۱ \quad (۱۹۲)$$

میں حاصل ہوتی ہیں۔

[معمولی استدلال سے اِس ہندسی مسئلہ کی صداقت ظاہر ہوگی کہ ایک ناقص نما اور ایک دوسرا دو درجی ہمیشہ باہم مزدوج وتروں کا ایک حقیقی جٹ مشترک رکھتے ہیں۔ کیونکہ ایک حقیقی خطی استحالہ سے ناقص نما ایک کرہ میں مستحیل ہوگا اور دوسرا دو درجی ایک نئے لیکن تاہم حقیقی دو درجی میں مستحیل ہوگا۔ اب

اِس حقیقی دو درجی کے صدر محور کُرہ اور دو درجی کے لیے باہم مزدوج حقیقی وتر ہیں اور اُلٹا استحالہ کرنے سے باہم مزدوج حقیقی وتر باہم مزدوج حقیقی وتر رہتے ہیں۔]

اور ہم نے جبریہ طور پر ثابت کیا ہے کہ مساواتیں (۱۹۱) مساواتوں (۱۹۲) میں مستحیل ہوسکتی ہیں لیکن یہ ظاہر ہے کہ یہ جبریہ ثبوت صرف تین متغیروں کی صورت پر محدود نہیں ہے اِس لیے مسئلہ بالا متغیروں کی کسی تعداد کے لیے درست ہونا چاہئے۔

۲۸۱ — اِس مسئلہ سے ثابت ہوتا ہے کہ ہم نئے محدد $\text{س}_1، \text{س}_2، \ldots \text{س}_\text{ن}$ معلوم کرسکتے ہیں جو محددوں $\text{ل}_1، \text{ل}_2، \ldots \text{ل}_\text{ن}$ سے رشتوں

$$\text{ل}_1 = \text{ک}_{11}\,\text{س}_1 + \text{ک}_{12}\,\text{س}_2 + \ldots + \text{ک}_{1\text{ن}}\,\text{س}_\text{ن} \qquad (۱۹۳)$$

$$\dot{\text{ل}}_1 = \text{ک}_{11}\,\dot{\text{س}}_1 + \text{ک}_{12}\,\dot{\text{س}}_2 + \ldots + \text{ک}_{1\text{ن}}\,\dot{\text{س}}_\text{ن} \qquad (۱۹۴)$$

کے ذریعہ مربوط ہوں اِس طور پر کہ اگر اِن محددوں کی رقوم میں بیان کیا جائے تو توانائی بالقوہ اور توانائی بالحرکت حسب ذیل اشکال اختیار کریں:

$$\text{ک} = \text{ک}_\text{ب} + \text{ع}_1\,\text{س}_1^2 + \text{ع}_2\,\text{س}_2^2 + \ldots + \text{ع}_\text{ن}\,\text{س}_\text{ن}^2 \qquad (۱۹۵)$$

$$\text{ت} = \text{ب}_1\,\dot{\text{س}}_1^2 + \text{ب}_2\,\dot{\text{س}}_2^2 + \ldots + \text{ب}_\text{ن}\,\dot{\text{س}}_\text{ن}^2 \qquad (۱۹۶)$$

محددوں $\text{س}_1، \text{س}_2، \text{س}_3، \ldots، \text{س}_\text{ن}$ کو نظام کے **صدر محدد** کہا جاتا ہے، بعض مصنف اِن کو **طبعی محدد** بھی کہتے ہیں۔

اِن محددوں کی رقوم میں لگرانج کی مساواتیں ہیں:

$$\frac{\text{ف}}{\text{فت}}\left(\frac{\text{جف ت}}{\text{جف}\,\dot{\text{س}}_1}\right) - \frac{\text{جف ت}}{\text{جف}\,\text{س}_1} = -\frac{\text{جف ک}}{\text{جف}\,\text{س}_1}\text{، وغیرہ}$$

ہیں اور یہ مساواتیں

$$\text{ب}_1\,\frac{\text{ف}^2\text{س}_1}{\text{فت}^2} = -\text{ع}_1\,\text{س}_1\text{، وغیرہ}$$

(۳۵۱)

ہو جاتی ہیں۔

قائم توازن

۲۸۲ — اگر ع_1 مثبت ہے تو فرض کرو کہ ہم $\frac{\text{ع}_1}{\text{ب}_1} = \text{ک}_1^2$ رکھتے ہیں اور اس لیے کہ ک_1 حقیقی ہو گا۔

مساوات اب ہے

$$\frac{\text{ف}^2 \text{س}_1}{\text{فت}^2} = -\text{ک}_1^2 \, \text{س}_1$$

اور اس کا حل ہے

$$\text{س}_1 = \text{ا}_1 \, \text{جم} \, (\text{ک}_1 \text{ت} - \text{ص}_1)$$

جو دفعہ (۲۰۸) [(۱۹۸)] کے مطابق ہے۔ اس طرح حرکت تعدد ک_1 کی سادہ موسیقی حرکت ہے۔ اگر تمام سر ع_1، ع_2، ....، ع_n مثبت ہوں تو مساواتوں کے مکمل حل کی شکل

$$\text{س}_1 = \text{ا}_1 \, \text{جم} \, (\text{ک}_1 \text{ت} - \text{ص}_1)،$$

$$\text{س}_2 = \text{ا}_2 \, \text{جم} \, (\text{ک}_2 \text{ت} - \text{ص}_2)، \text{ وغیرہ}$$

ہو گی اور کسی ذرہ کا محدد لا جس کی قیمت توازن کے محل میں لا_0 ہے حسب ذیل ہو گی:

$$\text{لا} = \text{لا}_0 + (\text{ط}_1 - \bar{\text{ط}}_1) \frac{\text{جف لا}}{\text{جف ط}_1} + (\text{ط}_2 - \bar{\text{ط}}_2) \frac{\text{جف لا}}{\text{جف ط}_2} + \ldots\ldots$$

$$= \text{لا}_0 + \text{ل}_1 \frac{\text{جف لا}}{\text{جف ط}_1} + \text{ل}_2 \frac{\text{جف لا}}{\text{جف ط}_2} + \ldots\ldots$$

$$= \text{لا}_0 + \text{ب}_1 \, \text{جم} \, (\text{ک}_1 \text{ت} - \text{ص}_1) + \text{ب}_2 \, \text{جم} \, (\text{ک}_2 \text{ت} - \text{ص}_2) + \ldots$$

جہاں ب_1، ب_2، .... نئے مستقلات ہیں۔

پس کسی واحد ذرہ کی حرکت وہ ہو گی جو متعدد سادہ موسیقی

حرکتوں سے مُرکب ہوگی۔

(۳۵۲) **۲۸۳** — کسی صدر محدد سہ_1 کے جواب میں توانائی بالقوہ $\text{ع}_1\,\text{سہ}_1^2$ ہے یا اگر ہم سہ_1 کو مساوات (۱۹۸) سے حاصل کریں تو یہ توانائی بالقوہ

$$\text{ع}_1\,\text{ا}_1^2\,\text{جم}^2\,(\text{کہ}_1\,\text{ت} - \text{صہ}_1)$$

ہے۔

اسی طرح اِس صدر ارتعاش کے جواب میں توانائی بالحرکت $\text{ب}_1\,\text{سہ}_1^2$ یا

$$\text{ب}_1\,\text{ا}_1^2\,\text{کہ}_1^2\,\text{جب}^2\,(\text{کہ}_1\,\text{ت} - \text{صہ}_1)$$

ہے۔ اگر ایک طویل وقت کے لیے اوسط لیا جائے تو $\text{جم}^2\,(\text{کہ}_1\,\text{ت} - \text{صہ}_1)$ اور $\text{جب}^2\,(\text{کہ}_1\,\text{ت} - \text{صہ}_1)$ کی اوسط قیمتیں $\frac{1}{2}$ ہیں اور اِس لیے اوسط توانائی بالقوہ اور اوسط توانائی بالحرکت علی الترتیب

$$\frac{1}{2}\,\text{ع}_1\,\text{ا}_1^2 ،\quad \frac{1}{2}\,\text{ب}_1\,\text{ا}_1^2\,\text{کہ}_1^2$$

ہیں اور یہ مساوی ہیں کیونکہ $\text{کہ}_1^2 = \frac{\text{ع}_1}{\text{ب}_1}$ ۔ پس کسی ارتعاش میں اوسط توانائی بالقوہ اور اوسط توانائی بالحرکت مساوی ہوتی ہیں۔

غیر قایم توازن

۲۸۴ — فرض کرو کہ مساوات (۱۹۵) کے سروں میں سے کوئی ایک سر (فرض کرو ع_1) منفی ہے۔ فرض کرو کہ ہم $\frac{\text{ع}_1}{\text{ب}_1} = -\text{کہ}_1^2$ رکھتے ہیں تو کہ_1 حقیقی ہوگا۔ اب مساوات (۱۹۷) شکل

$$\frac{\text{ف}^2\,\text{سہ}_1}{\text{فت}^2} = \text{کہ}_1^2\,\text{سہ}_1$$

اختیار کرتی ہے اور اس کا حل ہے

$$س_۱ = ا_۱ و^{ک_۱ ت} + ب_۱ و^{-ک_۱ ت}$$

جس سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ $س_۱$ وقت کے ساتھ لا انتہا بڑھتا ہے اور قیمت $س_۱ = ۰$ کے گرد اہتزاز نہیں کرتا۔ اس طرح حرکت غیر قائم ہے اور اب ہم دیکھتے ہیں کہ حرکت صرف اُس وقت قائم ہو سکتی ہے جبکہ سروں $ع_۱$، $ع_۲$، ... $ع_ن$ میں سے سب سر مثبت ہوں۔ بالفاظ دیگر

قائم توازن کے لیے توانائی بالقوہ توازن کی تشکیل میں مطلقاً اقل ہونی چاہئے۔

یہ وہ نتیجہ ہے جس کو بغیر ثبوت کے دفعہ ۱۵۳ میں بیان کیا جا چکا ہے۔ (۳۸۳)

قسری ارتعاش

۲۸۵ — وہ اہتزاز جن پر ہم اب تک غور کرتے رہے ہیں اُس نمونے کے ہیں جو آزاد ارتعاش کے طور پر مشہور ہیں یعنے کُل عاملہ قوتیں خود نظام کی توانائی بالقوہ سے پیدا ہوتی ہیں۔

لیکن اہتزاز کا ایک اور نمونہ پیش ہوتا ہے جبکہ نظام پر اُن قوتوں کے علاوہ جو خود اُس کی توانائی بالقوہ سے پیدا ہوتی ہیں بیرونی جانب سے دوسری قوتیں بھی عمل کر رہی ہوں۔ اِن اہتزازوں کو قسری اہتزاز کہتے ہیں۔

فرض کرو کہ نظام کی توانائی بالقوہ اور توانائی بالحرکت علی الترتیب مساواتوں (۱۹۵) اور (۱۹۶) سے حاصل ہوئی ہیں اور یہ کہ کسی لمحہ پر عمل کرنے والی بیرونی قوتوں کا نظام ایسا ہے کہ ایک چھوٹے ہٹاؤ میں انجام پایا ہوا کام

$$س_۱ \delta س_۱ + س_۲ \delta س_۲ + ...$$

ہے۔

اب اس نظام کے لیے لگرانج کی مساواتیں ہیں:

$$\frac{\text{فر}}{\text{فرت}}\left(\frac{\text{جف ت}}{\text{جف سہ}_1}\right)-\frac{\text{جف ت}}{\text{جف سہ}_1}=-\frac{\text{جف ک}}{\text{جف سہ}_1}+\text{سا}_1\text{، وغیرہ}$$

یہ مساوات ہو جاتی ہے:

$$\text{۲ بہ}_1\frac{\text{فر}^2\text{سہ}_1}{\text{فرت}^2}=-\text{۲ عہ}_1\text{سہ}_1+\text{سا}_1 \qquad (199)$$

جس میں سا_1 اب وقت کا ایک تفاعل ہے۔ اس مساوات کو اُن قاعدوں کے ذریعہ حل کیا جا سکتا ہے جو تفرقی مساواتوں کی کسی کتاب میں مذکور ہوتے ہیں۔ اگر حسب سابق $\text{کہ}_1^2=\frac{\text{عہ}_1}{\text{بہ}_1}$ لیا جائے تو عام حل ہے:

$$\text{سہ}_1=\text{ا}_1\text{جم}(\text{کہ}_1\text{ت}-\text{صہ}_1)+\frac{1}{\sqrt{\text{۲ عہ}_1\text{بہ}_1}}\int_{\text{تَ}=-\infty}^{\text{تَ}=\text{ت}}(\text{سا}_1)_{\text{تَ}}\,\text{جب کہ}_1(\text{ت}-\text{تَ})\,\text{فرتَ}$$

تکمل کی نچلی حد یا تو $\text{تَ}=-\infty$ ہے یا وہ لمحہ ہے جس پر بیرونی قوتوں نے اولاً عمل کرنا شروع کیا تھا۔

۲۸۶ — ایک بہت اہم صورت پیدا ہوتی ہے جبکہ سا_1 صرف وقت کے لحاظ سے دوری ہو، فرض کرو

$$\text{سا}_1=\text{ع جم}(\text{ش ت}-\text{جہ}_1)$$

اب حل ہے

$$\text{سا}_1=\text{ا}_1\text{جم}(\text{کہ}_1\text{ت}-\text{صہ}_1)+\frac{\text{ع}}{\text{۲ عہ}_1-\text{۲ بہ}_1\text{ش}_1^2}\text{جم}(\text{ش}_1\text{ت}-\text{جہ}_1) \qquad (354)$$

لیکن چونکہ $\text{عہ}_1=\text{بہ}_1\text{کہ}_1^2$ اس لیے

$$\text{سا}_1=\text{ا}_1\text{جم}(\text{کہ}_1\text{ت}-\text{صہ}_1)+\frac{\text{ع}}{\text{۲ عہ}_1\left(1-\frac{\text{ش}_1^2}{\text{کہ}_1^2}\right)}\text{جم}(\text{ش}_1\text{ت}-\text{جہ}_1)$$

اِس طرح اب سا میں تغیّر، تعدد کہ کی سادہ موسیقی حرکت اور نیز تعدد ش کی سادہ موسیقی حرکت سے مرکب ہے جہاں ش قوت عاملہ کا تعدد ہے۔

ہم دیکھتے ہیں کہ اگر ش، کہ سے بہت ہی قریب ہو تو یہ دوسرا ارتعاش بہت بڑے حیطہ کا ہے۔ انتہائی صورت ش = کہ میں دوسرے ارتعاش کا حیطہ لامتناہی ہو جاتا ہے لیکن اب یہ دو ارتعاش ایک ہی دَور کے ہوتے ہیں اور اس لیے اِن کو مرکب کیا جا سکتا ہے۔ ہم نہیں کہہ سکتے کہ حاصل ارتعاش لامتناہی حیطہ کا ہوگا کیونکہ ا اور صہ کی قیمتیں معلوم نہیں ہیں اور یہ عین ایسی ہو سکتی ہیں کہ دوسری رقم کے لامتناہی حیطہ کو برباد کر دیں۔ حاصل شدہ نتیجہ حسب ذیل شکل میں بیان کیا جا سکتا ہے:

جب کسی نظام پر ایک دَوری قوت عمل کرے جس کا تعدد نظام کے صدہا ارتعاشات میں سے ایک کے تعدد کے بہت ہی قریب ہو تو قسری اہتزازات بہت بڑے حیطہ کے ہوں گے۔

اِس کو گمک کا اصول کہتے ہیں۔

یہ اُصول ایسا ہے جس کے متعدد اطلاقات فطرت میں نظر آتے ہیں۔ مثلاً ایک پُل کو جو مطلقاً اُستوار نہیں ہوتا ایک ایسا نظام سمجھا جا سکتا ہے جس میں متعدد آزاد ارتعاش ہیں۔ اگر آدمیوں کی ایک جماعت قدم میں قدم ملاتے ہوئے باقاعدہ پُل پر سے گذرے تو وہ پُل پر ایک دَوری قوت لگائیں گے اور اگر اِن کے قدم کا دَور پُل کے آزاد دَوروں میں سے کسی ایک پر تقریباً منطبق ہو جائے تو پُل میں قسری ارتعاشات کا حیطہ اسقدر بڑا ہو سکتا ہے کہ پُل پر خطر ہو جائے۔ یہی سبب ہے کہ جب فوج پُل کو عبور کرنا شروع کرتی ہے تو اس کو "بے قاعدہ قدموں میں چلنے" کا حکم دیا جاتا ہے۔

دوسری مثال ایک جہاز کی ہو سکتی ہے، جہاز کامل طور پر اُستوار نہیں ہوتا اور اس لیے اس میں متعدد آزاد ارتعاش ہوں گے۔ اس کے انجنوں کی حرکت ایک دَوری قوت لگائے گی جس کا دَور اِس کی گردش کے مساوی ہوگا اور اگر یہ

دَور جہاز کے آزاد ارتعاشات میں سے کسی پر منطبق ہو جائے تو جہاز بہت بری طرح نیچے اوپر ہونا شروع کرے گا۔ اس کا علاج انجن کی چال کو بدلکر کیا جا سکتا ہے تاآنکہ وہ جہاز کے آزاد ارتعاش کے ساتھ گمگ میں نہ ہو۔

(۳۵۵) آخری مثال کے طور پر یہ بتایا جا سکتا ہے کہ کوئی جہاز اپنے انتصابی محل کے گرد لڑھکنے کا ایک آزاد دَور رکھے گا۔ اگر جہاز سمندر کے اندر بہنور میں ہو تو اس سے ٹکرانے والی موجیں بیرونی قوتیں لگائیں گی جن کو تقریباً دَوری سمجھا جا سکتا ہے۔ اگر موجوں کا دَور جہاز کے دَور پر منطبق ہو جائے تو جہاز بہت زیادہ لڑھکنے لگیگا اگرچہ موجیں مقابلتاً چھوٹی ہوں۔ اس خطرہ کا علاج جہاز کے راستہ کو بدل کر کیا جا سکتا ہے، اس کا نتیجہ یہ ہوگا کہ موجیں اب مختلف وقفہ پر جہاز سے ٹکرائیں گی۔ دوسرا طریقہ بادبان پھیلا کر جہاز کے میلان کو بدلنے کا ہے، اس کی وجہ سے جہاز توازن کے ایک مختلف محل کے گرد اہتزاز کرے گا اور اس کے گرد آزاد ارتعاشات مختلف ہوں گے۔

آئینی مساواتیں

۲۸۷ — اگر ط_1، ط_2، ... کسی نظام کے لگرانجی محدد ہوں تو توانائی بالحرکت ت ایک دودرجی تفاعل ہے ط_1، ط_2، ط_3 ... کا۔ فرض کرو کہ متناظر معیار ع_1، ع_2، ...، ع_n ہیں جو مساواتوں

$$\text{ع}_1 = \frac{\text{جف ت}}{\text{جف ط}_1}\text{، وغیرہ} \tag{۳۰۰}$$

سے حاصل ہوتے ہیں۔

اب فرض کرو کہ ہم ایک تفاعل تَ شریک کرتے ہیں جہاں

$$\text{تَ} = \text{ع}_1\text{ط}_1 + \text{ع}_2\text{ط}_2 + \dots - \text{ت}$$

اس طرح تَ ایک تفاعل ہے ع_1، ع_2، ...، ط_1، ط_2، ...، ط_1، ط_2 ... کا۔
نیز یہ ظاہر ہے کہ ع_1، ع_2، ... تفاعلات ہیں ط_1، ط_2، ...، ط_1، ط_2 ... کے۔

تَ کو تفرق کرنے پر حاصل ہوتا ہے

$$\text{فرتَ} = \text{ع}_1 \,\text{فرطہ}_1 + \text{ع}_2 \,\text{فرطہ}_2 + \dots$$
$$+ \text{طہ}_1 \,\text{فرع}_1 + \text{طہ}_2 \,\text{فرع}_2 + \dots$$
$$- \frac{\text{جف ت}}{\text{جف طہ}_1}\,\text{فرطہ}_1 - \frac{\text{جف ت}}{\text{جف طہ}_2}\,\text{فرطہ}_2 \dots$$
$$- \frac{\text{جف ت}}{\text{جف طہ}_1}\,\text{فرطہ}_1 - \frac{\text{جف ت}}{\text{جف طہ}_2}\,\text{فرطہ}_2 - \dots$$

اور یہ، مساوات (۲۰۰) کی رو سے

$$\text{فرتَ} = \text{طہ}_1 \,\text{فرع}_1 + \text{طہ}_2 \,\text{فرع}_2 + \dots - \frac{\text{جف ت}}{\text{جف طہ}_1}\,\text{فرطہ}_1 - \frac{\text{جف ت}}{\text{جف طہ}_2}\,\text{فرطہ}_2 - \dots$$

(۲۰۱)

میں تحویل ہوتی ہے۔

(۳۵۶) اب چونکہ تفرقی فرطہ$_1$، فرطہ$_2$، ..... اس مساوات میں شریک نہیں ہیں اس لیے یہ معلوم ہوتا ہے کہ تَ کو صرف ع$_1$، ع$_2$، .....، طہ$_1$، طہ$_2$، ... کے ایک تفاعل کے طور پر بیان کیا جاسکتا ہے۔ ہم آسانی سے اس کی قیمت معلوم کر سکتے ہیں۔ چنانچہ

$$\text{ع}_1 \,\text{طہ}_1 + \text{ع}_2 \,\text{طہ}_2 + \dots + \text{ع}_\text{ن} \,\text{طہ}_\text{ن}$$
$$= \text{طہ}_1 \frac{\text{جف ت}}{\text{جف طہ}_1} + \text{طہ}_2 \frac{\text{جف ت}}{\text{جف طہ}_2} + \dots + \text{طہ}_\text{ن} \frac{\text{جف ت}}{\text{جف طہ}_\text{ن}}$$

= ۲ ت، کیونکہ ت ایک متجانس دودرجی تفاعل ہے طہ$_1$، طہ$_2$، ..... کا۔

اس طرح $\quad \text{تَ} = ۲\text{ت} - \text{ت} = \text{ت}$

جس سے یہ ثابت ہے کہ تَ، ت کے مساوی ہے لیکن وہ ع$_1$، ع$_2$، .....، طہ$_1$، طہ$_2$، ... کے ایک تفاعل کے طور پر بیان ہوا ہے۔

اس لیے

$$\text{تَ} = \text{ت} = \frac{1}{2}\left(\text{ع}_1\,\text{طہ}_1 + \text{ع}_2\,\text{طہ}_2 + \cdots + \text{ع}_n\,\text{طہ}_n\right)$$

تمثیلاً فرض کرو کہ $\text{ت} = \text{ا}\,\text{طہ}_1^2 + 2\,\text{ھ}\,\text{طہ}_1\,\text{طہ}_2 + \text{ب}\,\text{طہ}_2^2$

تو $\text{ع}_1 = 2(\text{ا}\,\text{طہ}_1 + \text{ھ}\,\text{طہ}_2)$، $\text{ع}_2 = 2(\text{ھ}\,\text{طہ}_1 + \text{ب}\,\text{طہ}_2)$

اب تعریف کی رو سے

$$\text{تَ} = \text{ع}_1\,\text{طہ}_1 + \text{ع}_2\,\text{طہ}_2 + \cdots - \text{ت}$$

$$= 2\text{طہ}_1(\text{ا}\,\text{طہ}_1 + \text{ھ}\,\text{طہ}_2) + 2\text{طہ}_2(\text{ھ}\,\text{طہ}_1 + \text{ب}\,\text{طہ}_2) - \text{ت}$$

$$= \text{ت} = \frac{1}{2}\,\text{ع}_1\,\text{طہ}_1 + \frac{1}{2}\,\text{ع}_2\,\text{طہ}_2$$

مساوات (۲۰۱) سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{جف تَ}}{\text{جف طہ}_1} = -\frac{\text{جف ت}}{\text{جف طہ}_1},$$

$$\frac{\text{جف تَ}}{\text{جف ع}_1} = \text{طہ}_1 \qquad (۲۰۲)$$

لگرانج کی مساواتوں

$$\frac{\text{فر}}{\text{فزت}}\left(\frac{\text{جف ل}}{\text{جف طہ}_1}\right) - \frac{\text{جف ل}}{\text{جف طہ}_1} = 0$$

میں حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{جف ل}}{\text{جف طہ}_1} = \frac{\text{جف (ت - ک)}}{\text{جف طہ}_1} = \frac{\text{جف ت}}{\text{جف طہ}_1} = \text{ع}_1$$

(۳۵۷)

اس طرح لگرانج کی مساواتیں شکل

$$\frac{\text{فر ع}_1}{\text{فزت}} = \frac{\text{جف ل}}{\text{جف طہ}_1} = \frac{\text{جف (ت - ک)}}{\text{جف طہ}_1} = -\frac{\text{جف (تَ + ک)}}{\text{جف طہ}_1}$$

میں لکھی جا سکتی ہیں، اور مساوات (۲۰۲) کی رُو سے

$$\frac{\text{فر طہ}_1}{\text{فزت}} = \frac{\text{جف تَ}}{\text{جف ع}_1}$$

اگر ہم لکھیں ھ = تَ + ک تو یہ مساواتیں شکل ذیل اختیار کرتی ہیں :

فر طہ۱ / فر تَ = جف ھ / جف ع۱ ،

فر ع۱ / فر تَ = - جف ھ / جف طہ۱ ، وغیرہ

۲۸۸ — اِس کو حرکیاتی مساواتوں کی آئینی شکل کہا جاتا ہے۔ تفاعل ھ کو ہیملٹونی تفاعل کہتے ہیں اور چونکہ ھ = تَ + ک اِس لیے ہم دیکھتے ہیں کہ ھ کل توانائی ہے جو محددوں طہ۱، طہ۲، ....، طہn اور معیاروں ع۱، ع۲، ....، عn کے ایک تفاعل کے طور پر بیان کی گئی ہے۔ یہ آئینی شکل وہ سادہ ترین اور کامل ترین شکل ہے جس میں تعمیم شدہ حرکیاتی مساواتیں بیان کی جاسکتی ہیں۔ اسی سبب سے مساواتوں کی یہ آئینی شکل حرکیات اعلیٰ، ریاضیاتی طبیعات، اور ریاضیاتی ہیئت کی بہت سی تحقیقاتوں میں ابتداً استعمال کیجاتی ہے۔

۲۸۹ — ہم اس کتاب کو تعمیم شدہ محددوں کے استعمال کی دو مثالیں دے کر ختم کریں گے، یہ مثالیں ریاضیاتی طبیعات کی دو شاخوں سے لیگئی ہیں۔

مثال ماحرکیات سے — فرض کرو کہ کسی شکل کا ایک ٹھوس جسم ایک ندی میں ہے جو یکساں رفتار و سے بہہ رہی ہے۔ اگر جسم پانی کی سطح کے نیچے کافی گہرائی پر ہو تو اِس کی موجودگی سے سطح پر کے بہاؤ میں کوئی خلل نہیں ہوگا اور صرف جسم کے قرب میں پانی کے بہاؤ میں خلل پڑے گا۔ ابتدائی ماحرکیاتی اصولوں سے یہ ثابت کیا جاسکتا ہے کہ صرف ایک طریقہ ہے جس میں پانی جسم پر سے گذر کر بہہ سکتا ہے۔ پس یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ پانی کے بہاؤ کی توانائی بالحرکت مساوات

ت = تب + ء و۲

سے حاصل ہوتی ہے جہاں ت وہ قیمت ہے جو توانائی بالحرکت کی ہو گی اگر جسم کو (۳۵ء) پانی سے نکال لیا جائے۔ فرض کرو کہ جسم پر پانی کے دباؤ کے علاوہ بیرونی قوتیں عمل کرتی ہیں۔ فرض کرو کہ کسی محور کے گرد اِن قوتوں کے معیاروں کا مجموعہ طا ہے اور فرض کرو کہ طہ ایک محدد ہے جس سے اُس زاویہ کی پیمائش ہوتی ہے جس میں سے جسم اِس محور کے گرد گھومتا ہے۔ تب محدد طہ کے جواب میں لگرانج کی مساوات ہے

$$طا = \frac{جف\ تا}{جف\ طہ} - \left(\frac{جف\ ت}{جف\ طہ}\right)\frac{فر}{فرت}$$

اگر بیرونی قوتیں جسم کو پانی میں ساکن رکھنے کے لیے عین کافی ہوں تو $\frac{فر}{فرت}\left(\frac{جف\ ت}{جف\ طہ}\right) = ۰$ اور اِس لیے

$$طا = -\frac{جف\ ت}{جف\ طہ} = -\frac{جف\ عہ}{جف\ طہ}\ و^{۲}$$

پس پانی کے دباؤ کے معیاروں کا مجموعہ ۔ طا ہونا چاہیے یا

$$\frac{جف\ عہ}{جف\ طہ}\ و^{۲}$$

ہم عہ کو جسم کی شکل سے محسوب کر سکتے ہیں اور اِس طرح جسم پر عمل کرنے والے جفتوں کا علم حاصل ہو سکتا ہے۔

مثال برق مقناطیسیت سے۔ وہ توانائی جو طاقتوں ط، طَ کی برق کی دو یکساں رَوؤں کے بہاؤ کو دو معلومہ بند دَوروں میں جاری کرنیکے لیے مطلوب ہوتی ہے شکل

$$ع = \frac{۱}{۲}\ ل\ ط^{۲} + م\ ط\ طَ + \frac{۱}{۲}\ ن\ طَ^{۲}$$

میں معلوم ہے جہاں ل اور ن علی الترتیب پہلے اور دوسرے دَوروں کی شکل پر منحصر ہیں اور م دونوں دَوروں کی شکل پر اور نیز ایک دوسرے کے لحاظ سے اِن کے محلوں پر منحصر ہے۔

فرض کرو کہ دوسرا دَور پہلے دَور کی جانب کسی خط پر حرکت کرنے میں آزاد ہے۔
فرض کرو کہ لا ایک محدد ہے جو اِس خط پر پیمائش کیا گیا ہے اور فرض کرو کہ اُس سمت میں جس میں لا کی پیمائش ہوئی ہے وہ قوت جو دوسرے دَور کو ساکن رکھنے کے لیے مطلوب ہے لا ہے۔

فرض کرو کہ ل سے حسب معمول تفاعل ت ۔ ک تعبیر ہوتا ہے اور فرض کرو کہ دوسرے دَور پر ایک بیرونی قوت عاملہ لا عمل کرتی ہے ۔ اب محدد لا کے لیے لگرانج کی مساوات ہے :

$$\frac{\text{فر}}{\text{فرت}}\left(\frac{\text{جف ل}}{\text{جف لاَ}}\right) - \frac{\text{جف ل}}{\text{جف لا}} = \text{لا}$$

اور چونکہ کوئی اسراع نہیں ہے اِس لیے

$$\text{لا} = -\frac{\text{جف ل}}{\text{جف لا}}$$

تجربہ سے معلوم ہوا ہے کہ

$$\text{لا} = -\text{طط}\,\frac{\text{جف م}}{\text{جف لا}} = -\frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}}$$

اگر دو رَوؤں کی توانائی توانائی بالقوہ ہوتی تو حاصل ہونا چاہیے

$$-\frac{\text{جف ل}}{\text{جف لا}} = +\frac{\text{جف ک}}{\text{جف لا}}،\quad -\frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}} = -\frac{\text{جف ک}}{\text{جف لا}}$$

یعنے قوت لا مشاہدہ کردہ قوت کے ٹھیک مخالف ہوتی ۔
اِس کے برخلاف اگر توانائی توانائی بالحرکت ہے تو

$$-\frac{\text{جف ل}}{\text{جف لا}} = -\frac{\text{جف ت}}{\text{جف لا}} = -\frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}}$$

اور اِس لیے لا کی قیمت مشاہدہ کے مطابق ہے۔
پس ہم اس نتیجہ پر پہنچتے ہیں کہ کسی برقی رو کی توانائی کُلاً توانائی بالحرکت ہوتی ہے ۔

(۳۵۷)

عام مثالیں

۱۔ ایک انجن کی رگڑ ایسی ہے کہ ایک اسپی طاقت سے ۲۵۰ وہ گردشیں فی ثانیہ کرنے لگتا ہے جبکہ کوئی بیرونی کام انجام نہیں دیتا۔ اِس کے متحرک حصوں کا جمود ایسا ہے کہ جب انجن ۱۵۰ گردشیں فی ثانیہ کرتا ہے اور اِس پر ایک اسپی طاقت عمل کرتی ہے تو اِس کی چال میں ۱۰ گردشوں فی ثانیہ کا اسراع پیدا ہوتا ہے۔ اگر انجن کو اپنے حال پر چھوڑ دیا جائے جبکہ وہ اپنی پوری چال ۲۵۰ گردشوں فی ثانیہ سے حرکت کر رہا ہو تو معلوم کرو کہ ساکن ہونے سے پیشتر وہ کتنی گردشیں کریگا۔

۲۔ ایک مربع ایک وتر کے گرد زاوئی رفتار سہ سے آزادانہ حرکت کر رہا ہے کہ اچانک ایک راس جو اُس وتر میں نہیں ہے ثابت ہو جاتا ہے۔ اِس ثابت نقطہ پر دھکہ کا دباؤ معلوم کرو اور ثابت کرو کہ نئی زاوئی رفتار ۱/۴ سہ ہوگی۔

۳۔ چار مساوی ڈنڈے جن میں سے ہر ایک کا طول ۲ ا اور کمیت ک ہے ایک معین کی شکل میں آزادانہ جوڑے گئے ہیں۔ یہ نظام سکون سے انتصابی وتر کے ساتھ گرتا ہے اور ایک ثابت افقی بے لچک مستوی سے ٹکراتا ہے۔ دھکہ اور اِس کے بعد والی حرکت معلوم کرو۔

۴۔ دو ذرے جو ایک اُستوار ڈنڈے کے ذریعہ مربوط ہیں ایک چکنے انتصابی دائرہ پر حرکت کرتے ہیں۔ چھوٹے اہتزاز کا وقت معلوم کرو۔

۵۔ ایک ایکساں ڈنڈے کا طول ل ہے، اِس کے وسطی نقطہ سے فاصلہ ج پر کے دو نقطوں سے مساوی ڈوریاں باندھی گئی ہیں اور اِن ڈوریو کے دوسرے سرے دو ثابت نقطوں سے جن کا درمیانی فاصلہ ۲ ج ہے باندھے گئے ہیں، یہ ثابت نقطے ایک ہی افقی خط میں واقع ہیں۔ صدر محدد اور ارتعاش کے متناظر دَور معلوم کرو۔

۶ — اگر پچھلی مثال کے ڈنڈے کے ایک سرے پر دھکہ د کی ایک افقی ضرب اِس کے طول کے علی القوائم پڑے تو دھکے کے بعد والی حرکت معلوم کرو ۔

۷ — نصف قطر ا کا ایک کھُردرا یکساں اسطوانہ ہے اور اِس کی مرکزی تراش کے گرد ایک ناامتداد پذیر ڈوری لپٹی ہوئی ہے ۔ ڈوری کا ایک سرا ایک ثابت نقطہ ف سے بندھا ہے اور اسطوانے کو گھماتے ہوئے ڈوری کو اِس پر لپیٹا گیا ہے یہانتک کہ وہ نقطہ ف کو مس کرتا ہے اور ف پر اسطوانہ کا مماس انتصابی ہے ۔ تب اسطوانہ کو چھوڑ دیا گیا ہے حرکت معلوم کرو ۔

(۳۶۰) ۸ — پچھلی مثال میں اگر ف پر کا مماس اسطوانہ کے محور پر عمود ہو لیکن ٹھیک انتصابی نہ ہو تو حرکت معلوم کرو ۔

۹ — کرّوی قطبی محددوں میں ثابت کرو کہ اکائی کمیت کے ایک متحرک ذرہ کی توانائی بالحرکت

$$ت = \frac{1}{2}\left(\dot{ر}^2 + ر^2\dot{ط}^2 + ر^2 جب^2 ط\, \dot{ل}^2\right)$$

سے حاصل ہوتی ہے ۔

پس ثابت کرو کہ ذرہ کے اسراع کے اجزائے ترکیبی ر، ط، ل کی بڑھتی ہوئی سمتوں میں حسب ذیل مقداروں کے ہیں :

$$\frac{ف}{فت}\left(\frac{جف\, ت}{جف\, \dot{ر}}\right) - \frac{جف\, ت}{جف\, ر}،\quad \frac{1}{ر}\left[\frac{ف}{فت}\left(\frac{جف\, ت}{جف\, \dot{ط}}\right) - \frac{جف\, ت}{جف\, ط}\right]،$$

$$\frac{1}{ر\, جب\, ط}\,\frac{ف}{فت}\left(\frac{جف\, ت}{جف\, \dot{ل}}\right)$$

ثابت کرو کہ اِن اسراعوں کی اصلی قیمتیں حسب ذیل ہیں :

$$\frac{ف^2 ر}{فت^2} - ر\dot{ط}^2 - ر\, جب^2 ط\, \dot{ل}^2،\quad \frac{1}{ر}\,\frac{ف}{فت}\left(ر^2\dot{ط}\right) - ر\, جب\, ط\, جم\, ط\, \dot{ل}^2،$$

۱ / (ر جب ط فرت) = فر (ر² جب² ط لہ)

۱۰ — یہ معلوم ہوا کہ ایک ذرہ کی رفتار اُس کے مدار میں اُس فاصلہ کے مُربع کے بالعکس بدلتی ہے جو اُس کو ایک ثابت نقطہ سے ہے۔
اِس کا مدار معلوم کرنے میں اقل ترین عمل کا اصول استعمال کرو اور اِس سے کشش کا قانون دریافت کرو۔

یہی نتیجہ توانائی کے قانونِ بقاء سے اخذ کرو۔

۱۱ — فرض کرو کہ کائنات کی تمام قوتیں نابود کردی گئی ہیں اور یہ کہ ایک مخفی میکانیت ہے جو توانائی بالحرکت کی حامل ہوسکتی ہے۔ فرض کرو کہ اِس توانائی بالحرکت کی مقدار صرف کائنات کے مادی اجسام کے محلوں پر منحصر ہے اور اگر کائنات کی قوتیں نابود نہ ہوتیں تو مذکورہ بالا توانائی بالحرکت مقدار میں صرف ایک مستقل اور علامت کے اختلاف کے ساتھ نظام کی توانائی بالقوہ کے مساوی ہوتی۔
ثابت کرو کہ اِس قسم کی کائنات کے حرکیاتی مظاہر اُس کائنات کے حرکیاتی مظاہر کے مماثل ہوں گے جس میں دونوں قوتیں اور توانائی بالحرکت موجود ہوں جہاں ثانی الذکر کائنات کی تبدیلیاں نیوٹن کے قوانین حرکت سے متعین کی گئی ہوں۔

۱۲ — متعدد بے کمیت کرے جن کے نصف قطر اُ، بُ، جُ، ... ہیں کثافت ثہ کے ایک لامتناہی سمندر میں ایک خط مستقیم میں حرکت کرتے ہیں، اِن کے مرکزوں کے درمیانی فاصلے رَاب، رَبج، ... ہیں اور اِن کی رفتاریں وا، وب، ... ہیں۔ جب اُ، بُ، جُ، ... بمقابلہ راب، ربج، ... کے چھوٹے ہوتے ہیں تو سمندر کی حرکت کی توانائی بالحرکت

$$ت = \frac{۲}{۳} \pi ث ا^۳ د_ا^۲ + \ldots + ۲\pi ث \frac{ا^۳ ب^۳}{ر^۳_{اب}} د_ا د_ب + \ldots$$

سے حاصل ہوتی ہے ۔

ثابت کرو کہ کسی مُشاہد کو جو سمندر کی موجودگی سے بے خبر ہو کُرے اِس طرح حرکت کرتے نظر آئیں گے گویا کہ اِن کمیتیں $\frac{۲}{۳}\pi ث ا^۳$، $\frac{۲}{۳}\pi ث ب^۳$، ... ہیں اور گویا کہ وہ قوتیں جو کُروں کے ہر زوج کے درمیان عمل کرتی ہیں اِن کی اِن کمیتوں کے حاصل ضرب کے اور اِن کی رفتاروں کے حاصل ضرب کے متناسب ہیں اور نیز اِن کے درمیانی فاصلے کی چوتھی قوت کے بالعکس متناسب ہیں ۔

تمّت

اشاریہ

نظری علم الحیل

نوٹ: اعداد سے صفحات کا حوالہ دیا گیا ہے۔

اصطلاحات

نظری علم الحیل

Acceleration	اسراع
Action	عمل
Amplitude	حیطہ
Automobile	آٹوموبیل
Bob	لنگر
Buoyancy	تیراؤ، اچھال
Capstan	لنگر خرچ
Canonical equations	آئینی مساواتیں
Catenary	زنجیرہ
Centroid	مرکز ہندسی
Circuit	دور
Coefficient of friction	رگڑ کی قدر
Coefficients of Inertia	جمود کے سر
Compression	پچکاؤ
Conservation (of energy)	تحفظ (توانائی کا)
Conservative (system of forces)	تحفظی یا بقائی (قوتوں کا نظام)

Contact	تماس
Couple	جفت
Couplings	جوڑک
Crane	حمالہ
Crank	کرنیک، گردونہ
Cycloid	خط تدویر
Cycloidal pendulum	تدویری رقاص
Dip	میلان
Driving wheels	چلاؤ پہیئے
Equilibrium	توازن
Elasticity	لچک
Electromagnetism	برق مقناطیسیت
Ellipse	ناقص
Ellipsoid	ناقص نما
Envelope	لفاف
Experimental science	تجربی سائنس
Extensible	امتداد پذیر
Extensibility	توسیع پذیری
Extension	توسیع
External forces	بیرونی قوتیں
Flanges	کوریں
Flexibility	ملائمت
Forced oscillation	قسری اہتزاز
Fork	دوشاخہ
Frame of reference	حوالے کا فریم

Frequency	تعدد
Friction	رگڑ
Gearing	گیرائی
Galvanometer	برقی روپیما
Generalized coordinates	تعمیمی محدد
Harmonic	موسیقی
Hold (of a ship)	پٹیا (جہاز کا)
Horse-power	اسپی طاقت
Hub	ناف
Hydrodynamics	ماحرکیات
Hyperbola	قطع زائد
Impact	تصادم
Impulse	دھکہ
Inclined plane	مائل مستوی
Indicator diagram	مظہار نقشہ
Inertia	جمود
Inextensible	ناامتداد پذیر
Internal forces	بیرونی قوتیں
Kinetic Energy	توانائی بالحرکت
Lamina	پترا
Law of inverse square	معکوس مربع کا قانون
Line of action	خط عمل
Line of quickest descent	سریع ترین اُتار کا خط
Lockgate	قفلی گیٹ
Locomotive	لوکوموٹف، حراکہ

Mechanics	علم الحیل
Modulus of Elasticity	لچک کی قدر
Moment	معیار
Momentum	معیار حرکت
Natural science	طبعی سائنس
Orbit	مدار
Oscillations	اہتزاز
Parabola	مکافی
Pedal	رکاب
Pendulum	رقاص
Period	دَور
Pitch	گھاٹی
Piston	فشارہ
Pivot	چول
Point of inflection	نقطہ انعطاف
Potential energy	توانائی بالقوہ
Poundal	پونڈل
Principal axes	صدر محاور
Projectile	مرمی
Range (of a projectile)	ٹپہ (مرمی کا)
Reaction	تعامل
Reflection	انعکاس
Resilience	بازگشتگی
Resolution (of forces)	تحلیل (قوتوں کی)
Rest	سکون

Restitution (impulse of)	عود (کا دھکہ)
Retardation	ابطاء
Rigidity	اُستواری
Roller	بیلن
Rolling friction	لڑھکنی رگڑ
Rotation	گردِش
Sag	جھوک
Shell	خول
Simple harmonic motion	سادہ موسیقی حرکت
Skidding	گھسٹنا
Slack (couplings)	ڈھیلے (جوڑک)
Span	فصل
Spherical cap	کروی ٹوپی
Spokes	آرے
Strength	طاقت
Suspension bridge	جھولا پل
Tension	تناؤ
Theoretical Science	نظری سائنس
Thrust	دھکیل
Tractive force	جرّی قوت
Transformation	استحالہ
Translation (motion of)	(حرکت) انتقال
Transmissibility	انتقال پذیری
Uniformity of nature	فطرت کی ایکسانیت
Vectors	سمتی

Vibrations	ارتعاش
Windlass	ڈنڈا چرخ
Windmill	ہوائی چکی
Wheel and axle	چرخ اور محور
Work	کام

